Последовательности с нулевой суммой

Задачу представляют И. Богданов, К. Кохась, К. Куюмжиян

Условия задач

1 Нуль-последовательности

Для каждого натурального числа n обозначим через $\mathbb{Z}_n$ множество остатков при делении на n с операцией сложения по модулю n. Нуль-последовательностью в $\mathbb{Z}_n$ будем называть последовательность элементов $\mathbb{Z}_n$ с нулевой суммой.

1.1. Пусть n — натуральное число. Пусть k — наименьшее натуральное число, для которого верно, что любая последовательность из k элементов $\mathbb{Z}_n$ содержит нуль-подпоследовательность. Докажите, что $k = n$.

1.2. Опишите все последовательности в $\mathbb{Z}_n$ длины $n-1$, которые не содержат нуль-подпоследовательностей.

1.3. Опишите все последовательности в $\mathbb{Z}_n$ длины $n-2$, которые не содержат нуль-подпоследовательностей.

1.4. При каком наименьшем m любая последовательность из m элементов $\mathbb{Z}_{100}$, содержащая не меньше 81 различных элементов, имеет нуль-подпоследовательность, состоящую из 100 элементов?

1.5. При каком наименьшем m любая последовательность из m элементов $\mathbb{Z}_{100}$, содержащая ровно 4 различных элемента, имеет нуль-подпоследовательность длины 100?

1.6. Докажите, что всякая последовательность элементов $\mathbb{Z}_{12}$ длины 23 содержит нуль-подпоследовательность длины 12.

1.7. S — последовательность из 502 элементов $\mathbb{Z}_{541}$, причем S содержит ровно 10 различных элементов. Докажите, что S содержит нуль-подпоследовательность.

1.8. S — последовательность из 10 элементов $\mathbb{Z}_{17}$, причем S не содержит нуль-подпоследовательностей. Докажите, что какой-то элемент $\mathbb{Z}_{17}$ встречается в S не меньше 4 раз.

1.9. Пусть S — последовательность из n чисел взаимно простых с n. Докажите, что любой остаток по модулю n равен сумме некоторой подпоследовательности S.

1.10. Пусть S — последовательность из $\mathbb{Z}_n$ длины $2n-1$. Предположим, что некоторый элемент a встречается в этой последовательности не менее $[n/2]$ раз. Докажите, что S содержит нуль-подпоследовательность длины n.

1.11. Пусть p — нечетное простое. Сколько нуль-подпоследовательностей длины p (в $\mathbb{Z}_p$) имеет последовательность 0, 0, 1, 1, 2, 2, $\ldots$, $p-1$, $p-1$?

1.12. Дано целое число $n \geqslant 2$. S — последовательность длины n в $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ с ненулевой суммой. Докажите, что S имеет не меньше $n-1$ различных (непустых) нуль-подпоследовательностей.

2 Экстремальные задачи

Для каждого натурального n обозначим через $\mathbb{Z}_n^d$ множество всевозможных наборов $(m_1, m_2, \ldots, m_d)$, где m_i — остатки по модулю n, с операцией покоординатного сложения. Нуль-последовательностью в $\mathbb{Z}_n^d$ будем называть последовательность элементов $\mathbb{Z}_n^d$, с нулевой суммой (т. е. с суммой равной $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_n^d$). Обозначим через $g(n, d)$ наименьшее такое число M, что в любом подмножестве $\mathbb{Z}_n^d$, состоящем из M элементов, найдутся n элементов с нулевой суммой. Обозначим через $s(n, d)$ наименьшее такое число M, что в любой последовательности $a_1, \ldots, a_M \in \mathbb{Z}_n^d$ найдется нуль-подпоследовательность, состоящая из n элементов, т.е. найдутся различные индексы $i_1, \ldots, i_n$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant M$, такие что $a_{i_1} + \ldots + a_{i_n} = 0$. Таким образом, разные подпоследовательности могут совпадать, если их расматривать просто как списки.

2.1. Докажите, что $s(2, d) = 2^d + 1$.

2.2. Докажите, что $(n-1)2^d + 1 \leqslant s(n, d) \leqslant (n-1)n^d + 1$.

2.3. Докажите, что $s(n_1 n_2, d) \leqslant s(n_1, d) + n_1\bigl(s(n_2, d) - 1\bigr)$.

2.4. Докажите, что $g(3,3) \geqslant 10$, $s(3,3) \geqslant 19$. (На самом деле $g(3,3) = 10$, $s(3,3) = 19$.)

2.5. Докажите, что $g(n,2) \geqslant \begin{cases} 2n-1 & \text{при нечетных } n; \\ 2n+1 & \text{при четных } n. \end{cases}$

2.6. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 3×3. В узлах сетки (включая границу квадрата) отмечено 9 точек. Докажите, что можно выбрать 4 точки, у которых центр тяжести также расположен в узле сетки. Иными словами, докажите, что $g(4,2) = 9$.

2.7. Докажите, что $s(2048, d) = 2047 \cdot 2^d + 1$.

2.8. Докажите, что $s(432, 2) = 1725$.

3 Теорема Эрдеша–Гинзбурга–Зива и близкие вопросы

3.1. [Теорема Коши–Дэвенпорта] Пусть p — простое число, A и B — два непустых подмножества в $\mathbb{Z}_p$. Докажите, что $|A+B| \geqslant \min\{p,\ |A|+|B|-1\}$.

3.2. [Теорема Эрдеша–Гинзбурга–Зива] Докажите, что всякая последовательность элементов $\mathbb{Z}_n$ длины $2n-1$ содержит нуль-подпоследовательность длины n.

Вы можете пользоваться этими теоремами в решении следующих задач.

Многие из следующих задач верны в следующей более общей ситуации. Коммутативной конечной группой будем называть конечное множество, снабженное операцией "+", для которой выполнены привычные для этого значка аксиомы: коммутативность $a+b=b+a$; ассоциативность $a+(b+c)=(a+b)+c$; существование нулевого элемента со свойством $0+a=a$ при всех a; и существование обратного элемента: для каждого a существует элемент b, такой что $a+b=0$ (обозначают $b=-a$). Благодаря последней аксиоме определена и разность: $a-b$ по определению равно $a+(-b)$. Типичная конечная коммутативная группа устроена похоже на $\mathbb{Z}_d^n$: зафиксируем набор чисел $k_1, \ldots,$ k_n и рассмотрим множество "векторов" вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{Z}_{k_i}$. Операция "+" — обычное покоординатное сложение (для i-й координаты — по модулю k_i).

Задачи, утверждения которых верны для произвольной конечной коммутативной группы, помечены значком †. Мы особо приветствуем решения, которые не используют специфику $\mathbb{Z}_n$ и верны для произвольной коммутативной конечной группы.

3.3. Пусть p — простое число; $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — непустые подмножества $\mathbb{Z}_p$. Докажите, что
$$|A_1 + A_2 + \ldots + A_k| \geqslant \min\{p,\ \Big(\sum_{i=1}^{k} |A_i|\Big) - k + 1\}.$$

3.4. Пусть p — простое число и $S = (a_1, \ldots, a_{2p-1})$ — последовательность в $\mathbb{Z}_p$, в которой элементы $a_1, \ldots, a_s$ попарно различны ($s \geqslant 2$). Докажите, что в S существует нуль-подпоследовательность длины p, в которую входит не более одного из элементов $a_1, \ldots, a_s$.

3.5. а) Рассмотрим преобразования правильного 12-угольника — симметрии и повороты. Докажите, что среди любых 47 преобразований найдется 24 преобразования, композиция которых (в некотором порядке) дает тождественное отображение.

б) Докажите аналогичный факт для группы перестановок S_4.

3.6. Пусть p — простое число, T — последовательность в $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ длины p, h — максимальная кратность элемента в T. Докажите, что любой элемент $\mathbb{Z}_p$ является суммой не более чем h элементов T.

3.7. Пусть $m \geqslant k \geqslant 2$, причем m делится на k. Докажите, что всякая последовательность целых чисел длины $m+k-1$ содержит подпоследовательность длины m с суммой, делящейся на k.

3.8.† [Теорема Кемпермана–Шерка] Пусть n — натуральное число, A и B — два подмножества $\mathbb{Z}_n^d$, содержащие 0, и пусть уравнение $a+b=0$, где $a \in A$, $b \in B$, имеет относительно a и b единственное решение $a=b=0$. Докажите, что $|A+B| \geqslant \min\{n^d,\ |A|+|B|-1\}$.

3.9.† Пусть k и r — натуральные числа и пусть $A = \{a_1, \ldots, a_{k+r}\}$ — последовательность элементов $\mathbb{Z}_k$ ($r \leqslant k-1$). Докажите, что если 0 не является k-суммой этой последовательности, то последовательность имеет не меньше $r+1$ различных k-сумм.

3.10.† Пусть S — последовательность из n^d элементов $\mathbb{Z}_n^d$, h — максимальная кратность элемента в этой последовательности. Докажите, что S содержит нуль-подпоследовательность длины не более h.

3.11. Пусть p — простое число и $2 \leqslant k \leqslant p-1$. Рассмотрим последовательность элементов $\mathbb{Z}_p$ длины $2p-k$. Докажите, что если никакие p элементов этой последовательности не дают в сумме 0, то один какой-то элемент входит в последовательность не менее чем $p-k+1$ раз.

3.12.† Пусть B_1, B_2, …, B_h — набор некоторых подмножеств $\mathbb{Z}_n^d$. Положим $m_i = |B_i|$. Пусть оказалось, что $\sum_{i=1}^{h} m_i \geqslant n^d$. Докажите, что можно выбрать непустое множество элементов b_j — не более чем по одному из каждого множества — так, что сумма выбранных элементов равна $0 \in \mathbb{Z}_n^d$.

3.13.† Пусть $n > 4$ — нечетное число. Пусть S — последовательность элементов $\mathbb{Z}_n$ длины k, где $\frac{n+1}{2} \leqslant k \leqslant n$. Предположим, что S не содержит нуль-подпоследовательностей. Докажите, что какой-то элемент $\mathbb{Z}_n$ содержится в S не меньше $2k - n + 1$ раз.

3.14.† Пусть $A \subset \mathbb{Z}_n^d$, $|A| \geqslant n^d/k$. Докажите, что существует число r, $1 \leqslant r \leqslant k$, и последовательность a_1, …, a_r не обязательно различных элементов A, такая что $\sum a_i = 0$.

3.15. Докажите, что набор из $2n - 1$ элементов $\mathbb{Z}_n$ лишь тогда имеет единственную нуль-подпоследовательность длины n, когда он состоит из n экземпляров числа a и $(n-1)$ экземпляров числа b.

3.16.† Пусть S — подмножество $\mathbb{Z}_n^d$, состоящее из k элементов, причем S не имеет подмножеств с нулевой суммой. Докажите, что существует не меньше $2k-1$ элементов $\mathbb{Z}_n^d$, представимых в виде суммы нескольких элементов из S.

3.17. Пусть $M = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{2p-1}, b_{2p-1})\}$ — подмножество в $\mathbb{Z}_p^2$. Пусть никакой элемент $\mathbb{Z}_p$ не входит в последовательность a_1, …, a_{2p-1} больше двух раз. Докажите, что множество M содержит нуль-подпоследовательность (в $\mathbb{Z}_p^2$) длины p.

3.18. Докажите, что наименьшее m, для которого любая последовательность из $\mathbb{Z}_p^d$ длины m содержит нуль-подпоследовательность, равно $d(p-1)+1$.

4 *Промежуточный финиш. Добавления*

2.9. Найдите $g(8, 2)$ и, по возможности, $g(2^n, 2)$.

2.10. Докажите, что существует функция $f(d)$, такая что $s(n, d) \leqslant f(d)n$.

3.19. Докажите, что из любых $3p$ элементов $\mathbb{Z}_p^2$ с нулевой суммой можно выбрать p элементов с нулевой суммой.

3.20. Пусть S — последовательность в $\mathbb{Z}_n$ длины не меньше $(n+3)/2$, $n \geqslant 3$, не содержащая нуль-подпоследовательностей. Докажите, что S содержит число, взаимно простое с n.

3.21. Пусть p — простое число, $A \subset \mathbb{Z}_p$, причем $|A| > 2\sqrt{p}$.

а) Докажите, что A содержит подмножество с нулевой суммой.

б) Докажите, что любой остаток по модулю p реализуется как сумма некоторого подмножества из A.

5 *Коллекция открытых вопросов*

4.1. $g(p, 2) = 2p - 1$ для простых p.

Для $p = 3, 5, 7$ это доказал Кемниц [12], для $p \geqslant 67$ — Гао и Тангадураи [8]. Первый шаг их рассуждений — это задача 3.17.

4.2. $g(n, 2) = \begin{cases} 2n-1 & \text{при нечетных } n \\ 2n+1 & \text{при четных } n \end{cases}$

4.3. $s(n, 2) = 4n - 3$.

Это гипотеза Кемница. В прошлом году она была доказана сочетанием алгебраических и комбинаторных методов. Легко предъявить последовательность из $4n - 4$ элементов, не содержащую нуль-подпоследовательностей длины n: $(0,0)^{n-1}$, $(0,1)^{n-1}$, $(1,0)^{n-1}$, $(1,1)^{n-1}$.

4.4. Пусть p — простое число, A и B — два непустых подмножества $\mathbb{Z}_p$. Обозначим через $A \dot{+} B$ множество всевозможных сумм вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$ и $a \neq b$. Докажите, что $|A \dot{+} B| \geqslant \min\{p,\ |A| + |B| - 3\}$.

Это утверждение называется гипотеза Эрдеша–Гайлбронна. Оно доказано. Простого комбинаторного доказательства неизвестно.

4.5. Пусть S — последовательность из $4n-4$ элементов $\mathbb{Z}_n^2$. Если S не содержит нуль-подпоследовательности длины n, то S содержит всего 4 различных элемента, каждый — с кратностью $n-1$.

Это гипотеза Гао. Он проверил, что эта гипотеза мультипликативна, т. е. если она верна для $n = k$ и $n = \ell$, то она верна и для $n = k\ell$.

Решения

1.1. Последовательность, состоящая из $n-1$ единицы, не имеет нуль-подпоследовательностей. Следовательно, $k \geqslant n$. Пусть теперь a_1, a_2, …, a_n — произвольная последовательность длины n. Докажем, что она содержит нуль-подпоследовательность. Рассмотрим n сумм

$$\begin{aligned}&a_1\,,\\&a_1+a_2\,,\\&\ldots\qquad\ldots\\&a_1+\ldots+a_{n-1}\,,\\&a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n\,.\end{aligned}$$

Если ни одна из сумм не равна нулю, то какие-то две суммы совпадают как элементы $\mathbb{Z}_n$. Тогда их разность дает нуль-подпоследовательность.

1.2. О т в е т: это последовательности, содержащие всего один элемент a с кратностью $n-1$, причем a должно быть взаимно просто с n.

Действительно, пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — последовательность, не содержащая нуль-подпоследовательностей. Предположим, что $a_1 \neq a_2$. Рассмотрим тогда n сумм

$$\begin{aligned}&a_1\,,\\&a_2\,,\\&a_1+a_2\,,\\&a_1+a_2+a_3\,,\\&\ldots\qquad\ldots\\&a_1+\ldots+a_{n-1}\,,\\&a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n\,.\end{aligned}$$

Так как ни одна из сумм не равна нулю, то какие-то две суммы совпадают как элементы $\mathbb{Z}_n$. Тогда их разность дает нуль-подпоследовательность. Противоречие. Следовательно, последовательность не может содержать два разных элемента.

1.3. О т в е т: это последовательности, состоящие из $n-2$ копий некоторого элемента a, либо, последовательности, состоящие из $n-3$ копий элемента a и одного элемента $2a$.

Взято из [16], proposition 3.4.

Случаи $n \leqslant 5$ разбираются вручную. Пусть есть элементы $a_1 \neq a_2$. Для любого другого элемента a_3 аналогично предыдущему решению получаем, что среди элементов a_1, a_2, a_1+a_3, a_2+a_3, $a_1+a_2+a_3$, …, $a_1+\cdots+a_{n-2}$ есть два одинаковых. Это могут быть только суммы $a_1 = a_2+a_3$ или $a_2 = a_1+a_3$, т. е. $a_3 = \pm(a_1-a_2)$. Итак, для любого элемента a_3 мы имеем равенство $a_3 = \pm(a_1-a_2)$. Если в исходной последовательности встречаются как a_1-a_2, так и $-(a_1-a_2)$, то они в сумме дают 0, что невозможно. Значит, одновременно для всех элементов a_3 в полученной формуле реализуется один и тот же знак,т. е. все элементы последовательности, кроме a_1 и a_2, равны некоторому числу a. Одно из чисел a_1 и a_2 не равно a, пусть это a_1. Тогда аналогично все числа, кроме a_1 и a, равны между собой, т. е. есть при при $n>5$ получаем $a_2=\cdots=a_{n-2}=a$, и при $a_1 \neq a, 2a$ получаем нулевую подпоследовательность, что невозможно.

1.4. О т в е т: при $m=102$. Пусть $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{81}\}$ — различные элементы некоторой последовательности. Если в последовательности всего 101 элемент, и сумма всех элементов не лежит в A, то удаление любого элемента даст 100-элементную последовательность с ненулевой суммой. Если же в последовательности не менее 102 элементов, то отбросим лишние, чтобы осталось ровно 102 элемента, среди которых содержится все множество A. Пусть сумма этих 102 элементов равна s. В множестве A нетрудно подобрать два элемента a_i и a_j с суммой s. Отбрасывая их, получаем 100-элементную последовательность с нулевой суммой.

1.5. О т в е т: $m=197$.

Пусть последовательность длины 196 содержит числа -1, 2, 97 нулей и 97 единиц, Тогда в этой последовательности нет нуль-подпоследовательностей длины 100. Следовательно, $m \geqslant 197$.

Докажем, что $m = 197$ подходит. Пусть S — последовательность из 197 элементов, среди которых лишь четыре различных. Пусть a — элемент максимальной кратности, обозначим его кратность через s. По принципу Дирихле, $s \geqslant 50$. Если $s \geqslant 100$, то доказывать нечего. Вычтем a из каждого элемента последовательности, при этом суммы по 100 останутся неизменными. В полученной последовательности 0 имеет кратность s.

Пусть $s \leqslant 96$, T — подпоследовательность из всех ненулевых элементов S. Выберем из T длиннейшую подпоследовательность U (длины не больше 100) с нулевой суммой. Если $|U| \geqslant 50$, то, дополнив ее нулями, получим требуемое. Если $|U| \leqslant 47$, то в $T \setminus U$ найдется еще подпоследовательность по 1.1. Эта подпоследовательность также имеет длину, не превосходящую 50, поэтому, добавив ее к U, получим более длинную нуль-подпоследовательность, что невозможно. Значит, $|U| = 48$ или $|U| = 49$. При этом, аналогично, $T \setminus U$ не имеет нуль-подпоследовательностей. Но тогда, по предыдущим задачам, в $T \setminus U$ есть 97 одинаковых элементов, что противоречит рассматриваемому случаю.

Значит, $s \geqslant 97$. Если $s = 98$ или $s = 99$, то, аналогично, из всех ненулевых элементов нельзя выбрать нуль-подпоследовательность. Тогда среди них не более двух различных, а всего в S — не более трех, что невозможно. Наконец, если $s = 97$, то в T нуль-подпоследовательность может быть только длины 2. Пусть ее образуют элементы a и b. Если $a = b$, то $2a = 0$, и T содержит не более трех элементов, равных a (если бы их было 4 или больше, мы могли бы составить более длинную нуль-подпоследовательность). Расставив элементы T в ряд так, чтобы элементы a не стояли подряд, воспользуемся методом из 1.1 и получим еще одну нуль-подпоследовательность длины 2, не содержащую элементов a. Тогда наши две пары образуют нуль-подпоследовательность длины четыре. Если же $a \neq b$, то расставим T в ряд так: сначала все, равные a, потом все элементы, кроме a и b, и в конце все элементы b. Тогда аналогично можно найти нуль-подпоследовательность длины, большей двух.

1.6. Выберем из данной последовательности 11 пар чисел с четной суммой чисел в каждой паре. Поделим сумму чисел каждой пары на 2. Получим числа $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$. Выберем среди этих чисел 5 пар с четной суммой чисел в каждой паре и снова поделим сумму чисел каждой пары на 2. Получим числа $c_1, c_2, \ldots, c_5$. Рассмотрим эти пять чисел по модулю 3. Нетрудно видеть, что либо найдется остаток, встречающийся 3 раза, либо есть три разных остатка. Взяв эти три числа и припомнив историю их появления, сразу получаем 12 чисел с суммой, делящейся на 12.

1.7. Это частный случай теоремы Эрдеша и Эгглтона [7]. Число 502 будем для ясности обозначать через n, а 541 — через $n + 39$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данная последовательность. Допустим, что никакая ее подпоследовательность не дает в сумме 0. Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$ — некоторое число. Заметим, что тогда все суммы, которые можно получить, выбирая слагаемые только из m первых членов последовательности S, отличны от всех $n-m$ сумм вида $\sum_{i=1}^{r} a_i$, где $m+1 \leqslant r \leqslant n$ (иначе вычтем одну сумму из другой — останется как раз нуль-подпоследовательность). Покажем, что можно выбрать m так, что первые m членов последовательности S будут определять не менее $m + 39$ различных сумм.

Так как в S встречается всего 10 различных элементов, какой-то элемент $a \neq 0$ входит в S не менее 51 раза. Так как 541 — простое число, в $\mathbb{Z}_{541}$ возможно деление, значит, мы можем поделить все элементы S на a; результат каждого деления можно интерпретировать как число от 1 до 540. Таким образом, мы можем считать, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_{51} = 1$, а остальные элементы последовательности — какие-то натуральные числа от 1 до 540. Если ни одно из чисел a_i не превосходит 51, то в виде сумм чисел a_i представимы все натуральные числа от 1 до $\sum_{i=1}^{n} a_i$, последняя сумма никак не меньше чем сумма первых 10 натуральных чисел плюс $n - 10$. Все вместе — больше $n + 39$. Противоречие.

Если же в последовательности имеется число большее 51, мы можем считать, что $a_{52} > 51$. (При этом $a_{52} < 488$, так как иначе при помощи a_{52} и нескольких единиц можно сразу получить нуль-подпоследовательность.) Полагая $m = 52$, мы видим, что первые m членов последовательности представляют не менее $m + 51$ сумм, что и требовалось.

1.8. Частный случай 3.13.

1.9. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данная последовательность. Индукцией по i тривиально проверяется, что множество сумм $(\mathrm{mod}\ n)$ всевозможных подпоследовательностей в $a_1, a_2, \ldots, a_i$ содержит не меньше i различных остатков по модулю n.

1.10. Мы взяли это утверждение в [16]. Пусть S — данная последовательность длины $2n-1$ и элемент $a \in \mathbb{Z}_n$ встречается в ней $s \geqslant [n/2]$ раз. Мы можем считать, что $s \leqslant n - 1$, так как в противном случае результат очевиден.

Рассмотрим сдвинутую последовательность $S - a$, в ней 0 повторяется s раз. Пусть T_1 — подпоследовательность S, состоящая из всех ненулевых элементов S; в ней содержится не меньше $2n-1-s \geqslant n$ элементов. По результату задачи 1.1, T_1 содержит нуль-подпоследовательность. Обозначим ее T_2 и пусть она состоит из t_2 элементов, $2 \leqslant t_2 \leqslant n$. Мы можем считать, что последовательность T_2 выбрана так, что ее длина —

максимально возможная (среди последовательностей длины, не превосходящей n). Если бы оказалось, что $s + t_2 \geqslant n$, то, добавив к T_2 несколько нулей, мы получили бы требуемую нуль-подпоследовательность длины n. Следовательно, мы можем считать, что $s + t_2 < n$, откуда $t_2 \leqslant [n/2]$ (иначе нам опять поможет запас из $[n/2]$ нулей).

Теперь легко получить противоречие: так как $s+t_2 < n$, то в $T_1 \setminus T_2$ опять содержится не менее n элементов и можно выбрать нуль-подпоследовательность T_3 из t_3 элементов, причем $t_3 \leqslant t_2$ в силу максимальности T_2. Но так как при этом $t_2 \leqslant [n/2]$, мы получаем, что $t_3 + t_2 \leqslant n$, что противоречит максимальности T_2.

1.11. Ответ: $\frac{1}{p}(C_{2p}^p - 2) + 2$. Задача с IMO1995. Мы цитируем решение по [1]. Будем считать, что последовательность представляет собой объединение двух одинаковых множеств B и C, где $B = C = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$.

Разобьем все p-элементные подпоследовательности нашей последовательности, кроме B и C, на группы по p штук. Для каждого множества $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset B$ обозначим через $X+\ell$ множество $\{x_1+\ell, \ldots, x_k+\ell\}$, где все сложения выполняются по модулю p (т. е. $X+\ell$ — это просто циклический сдвиг множества X). В одну группу с подпоследовательностью A поместим следующие подпоследовательности

$$A_0 = A;\ A_1 = \big((A \cap B) + 1\big) \cup (A \cap C);\ A_2 = \big((A \cap B) + 2\big) \cup (A \cap C);\ \ldots, A_{p-1} = \big((A \cap B) + p - 1\big) \cup (A \cap C)\,.$$

Если $|A \cap B| = q$, $0 < q < p$, то суммы чисел последовательностей A_i и A_j отличаются на $(j-i)q$. Таким образом, все суммы чисел последовательностей, попавших в одну группу, попарно различны. Следовательно, ровно в одной из последовательностей каждой группы сумма чисел делится на p.

Итак всего мы имеем C_{2p}^p p-элементных последовательностей, две из них (с нулевой суммой) мы отбросили, а среди остальных лишь каждая p-я имеет нулевую сумму. Получается ответ $\frac{1}{p}(C_{2p}^p - 2) + 2$.

1.12. Пусть $A = (a_1, \ldots, a_n)$ — данная последовательность. В задаче 1.1 описан способ получения нуль-подпоследовательности, элементы которой расположены подряд в данной нумерации. Т.е. эта подпоследовательность имеет вид a_i, a_{i+1}, …, a_j, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Последовательности такого вида будем называть интервалами. Построив несколько нуль-подпоследовательностей, мы можем попытаться "перемешать" числа, изменив их нумерацию так, чтобы в новой нумерации ни одна из построенных подпоследовательностей не была бы интервалом. Если это удастся, мы с помощью способа из задачи 1.1 сумеем построить еще одну нуль-подпоследовательность вида "интервал", не совпадающую ни с одной из уже построенных. Продолжая в таком духе, мы построим нужные $n-1$ непустых подпоследовательностей.

Чтобы воплотить этот план в жизнь, нам осталось доказать следующее утверждение.

Лемма. Пусть даны $k \leqslant n-2$ подпоследовательности исходной последовательности A длины n, каждая из которых содержит не меньше 2 и не больше $n-1$ элементов. Тогда мы можем так перенумеровать элементы последовательности A, что ни одно из множеств в новой нумерации не будет интервалом.

Доказательство. Когда нам не важен порядок элементов, мы будем в этом доказательстве наряду со словом "последовательность" использовать слово "множество",

Индукция по n. Базу при $n \leqslant 4$ нетрудно получить хотя бы перебором. Пусть утверждение доказано для какого-то значения $n \geqslant 4$. Докажем его для $n+1$, т. е. проверим, что верно следующее утверждение.

Дана последовательность $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$. И пусть D_1, …, D_k — несколько ее подпоследовательностей, причем $k \leqslant n-1$ и подпоследовательности содержат от 2 до n элементов. Тогда существует перенумерация, в которой ни одна из подпоследовательностей D_i не является интервалом.

Так как множеств D_i не больше $n-1$, то существует элемент b_k, содержащийся не более чем в одном двухэлементном множестве из D_i; без ограничения общности, это b_{n+1}. Выкинем элемент b_{n+1} из исходной последовательности и всех содержащих его подмножеств. Если существует пара D_i, содержащая b_{n+1}, то выкинем ее. Если существует множество $D_j = \{b_1, \ldots, b_n\}$, то его также выкинем. Если нет ни того, ни другого, то выкинем произвольное множество D_m.

К оставшимся элементам и множествам можно применить предположение индукции, так как все полученные множества содержат от 2 до $n-1$ элементов. Посмотрим, в какое место полученной последовательности можно вставить b_{n+1} так, чтобы все требуемые условия выполнились. Если было выброшено произвольное множество D_m, то достаточно вставить b_{n+1} так, чтобы элементы D_m не стояли подряд — очевидно, это можно сделать. Иначе, если есть пара D_i, то b_{n+1} нельзя вставить в два места (соседних со вторым элементом пары), а если есть множество D_j, то также появляются два "запрещенных" места — края последовательности. Поскольку b_{n+1} можно было вставить в $n+1 \geqslant 5$ различных мест, то хотя бы одно осталось незапрещенным. Вставив туда b_{n+1}, получаем требуемую последовательность.

2.1. Элементы $\mathbb{Z}_2^d$ — это всевозможные наборы из d нулей и единиц с операцией покоординатного сложения по модулю 2. Всего имеется 2^d таких наборов, причем сумма любых двух наборов не равна нулевому набору. Если же взять $2^d + 1$ набор, то среди них найдутся два одинаковых. Их сумма равна нулевому набору.

2.2. Оценка сверху следует из того, что в последовательности, состоящей из $(n-1)n^d+1$ элементов множества $\mathbb{Z}_n^d$, какой-то элемент встречается n раз. Оценка снизу достигается на следующем примере: рассмотрим 2^n наборов вида $(m_1, \dots, m_d)$, где все числа m_i — это нули или единицы. Построим последовательность, которая содержит каждый такой набор ровно $n-1$ раз. Очевидно, никакие n элементов построенной последовательности не дают в сумме 0.

2.3. Пусть дана последовательность, состоящая из $s(n_1,d)+n_1(s(n_2,d)-1)$ чисел. Пользуясь определением числа $s(n_1,d)$, будем последовательно выбирать из нее группы по n_1 чисел с суммой, кратной n_1. Мы сумеем набрать таким образом $s(n_2,d)$ групп. Поделим сумму чисел каждой группы на n_1. У нас получится последовательность из $s(n_2,d)$ чисел. Осталось выбрать из нее n_2 чисел с суммой, делящейся на n_2.

2.4. Следующий пример девяти элементов $\mathbb{Z}_3^3$, никакие три из которых не дают в сумме 0, приведен в [10]:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Более того, взяв каждый вектор в двух экземплярах, получаем пример последовательности из 18 элементов, никакие три из которых также не дают в сумме 0.

2.5. См. [8]. При нечетных n следующее подмножество $\mathbb{Z}_n^2$, состоящее из $2n-2$ элементов, не содержит подмножества из n элементов с нулевой суммой:

$$(0,0),(0,1),\dots,(0,n-2),\ (1,1),(1,2),\dots,(1,n-1)\,.$$

При четных n есть аналогичное подмножество $\mathbb{Z}_n^2$, состоящее из $2n$ элементов, не содержащее подмножеств из n элементов с нулевой суммой:

$$(0,0),(0,1),\dots,(0,n-1),\ (1,0),(1,1),\dots,(1,n-1)\,.$$

2.6. Это доказано в [8], но как то уж очень муторно. Вот короткое изящное решение.

Заметим, что для любых целочисленных векторов a_1, a_2, a_3, a_4 выполнено тождество

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\,.$$

Разделим отмеченные 9 точек на 4 группы так, чтобы в каждой группе четности обеих координат были фиксированы. В каждой группе x_1, x_2, …, x_k вычислим значения $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{x_1+x_3}{2}$, …, $\frac{x_1+x_k}{2}$. Получилось $k-1$ целочисленных векторов, разных как элементы $\mathbb{Z}_2^2$. Рассмотрев все 4 группы, мы получим не меньше чем $9-4=5$ целых векторов. Выберем из них два вектора с совпадающими четностями координат. Соответствующие им пары не могли быть получены из одной группы, следовательно, они дают искомую четверку.

2.7. Неравенство $s(2^m,d) \geqslant (2^m-1)2^d+1$ — это частный случай утверждения 2.2. Противоположное неравенство $s(2^m,d) \leqslant (2^m-1)2^d+1$ легко доказывается по индукции. База $m=1$ — это утверждение задачи 2.1, а переход обосновывается с помощью 2.3.

2.8. Нетрудно видеть, что $s(2,2)=5$. Читатель, конечно, сможет перебрать варианты и убедиться, что $s(3,2)=9$. Теперь с помощью неравенства задачи 2.3 и левого неравенства 2.2 сразу получаем, что $s(n,2)=4n-3$, если число n имеет вид 2^k3^ℓ. Так как $432=27\cdot16$, то $s(432,2)=4\cdot432-3=1725$.

2.9. Мы не знаем элементарного решения этой задачи.

2.10. Это утверждение доказано в [3] неэлементарными средствами.

3.1. Следующее рассуждение, принадлежащее Дэвенпорту [6], мы цитируем по [4].

Случай $|A|+|B|>p$ достаточно прост, мы его оставляем читателю. Будем рассматривать множества с дополнительным условием $|A|+|B|\leqslant p$. Допустим, что для некоторых множеств A и B верно противоположное неравенство

$$|A+B| < |A|+|B|-1\,. \qquad (*)$$

Среди всех таких пар множеств выберем пары с наименьшим возможным значением величины $|A+B|$, а среди таких пар — ту, у которой меньшее множество A содержит меньше всего элементов. Можно считать, что $|A|\geqslant 2$.

Заметим, что если сдвинуть одно из множеств, т. е., например, вместо множества A рассмотреть множество $A+c$ при некотором $c\in\mathbb{Z}_p$, то старое множество $A+B$ также сдвинется на c. В частности, количество элементов в множестве $A+B$ не изменится.

Сдвинем множество A таким образом, чтобы множества A и B пересекались, но при этом $A\not\subset B$. Это можно сделать по следующей причине. Допустим, что любой сдвиг A приводит к тому, что если сдвинутое множество A пересекается с B, то оно содержится в B. Рассмотрим любой из таких случаев взаиморасположения множеств. Пусть a, $b\in A\cap B$ и $A\subset B$. Сдвинем множество A на $b-a$. Точка a перейдет в b, и следовательно, пересечение множеств не исчезнет. Если по-прежнему $A\subset B$, то образ точки b принадлежит обоим множествам. Рассмотрим еще один сдвиг на $b-a$ и т. д. Если каждый раз сдвинутое множество A будет содержаться в B, мы установим, что все точки

$$a,\ b,\ b+(b-a),\ b+2(b-a),\ b+3(b-a),\ \ldots$$

(все арифметические операции по модулю p) принадлежат множеству B. Это невозможно, поскольку множество этих точек совпадает с $\mathbb{Z}_p$.

Итак, мы можем сдвинуть множество A таким образом, чтобы множества A и B пересекались, но при этом $A\not\subset B$. Заметим, что тогда для множеств $A_1=A\cap B$ и $B_1=A\cup B$ верно, что $A_1+B_1\subset A+B$, т. е. $|A_1+B_1|\leqslant|A+B|$; кроме того, $|A_1|+|B_1|=|A|+|B|$. Таким образом, пара множеств A_1, B_1 удовлетворяет неравенству $(*)$. Но при этом $|A_1|<|A|$, что противоречит минимальности множества A.

3.2. Индукция по количеству простых множителей числа n.

База индукции. Пусть $n=p$ — простое число. Пронумеруем элементы последовательности в порядке возрастания: $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_{2p-1}$. Если $a_i=a_{i+p-1}$ при каком-нибудь i, то $a_i+a_{i+1}+\ldots+a_{i+p-1}=pa_i=0$ (в $\mathbb{Z}_p$) и мы нашли то, что требуется. В противном случае пусть $A_i=\{a_i,a_{i+p-1}\}$ при $1\leqslant i\leqslant p-1$, $A_p=\{a_{2p-1}\}$. Последовательно применяя теорему Коши–Дэвенпорта (или один раз — утверждение задачи 3.3), заключаем, что $|A_1+A_2+\ldots+A_{p-1}+A_p|=p$. Следовательно, каждый элемент $\mathbb{Z}_p$, в том числе 0, представим в виде суммы из p слагаемых, и это дает нам требуемую нуль-подпоследовательность.

Докажем индукционный переход. Пусть $n=pm$, где p — простое, и пусть a_1, a_2, …, a_{2n-1} — данная последовательность. По утверждению задачи для простых p (база индукции), мы можем последовательно выбирать наборы из p чисел, сумма которых делится на p. Так мы сумеем выбрать $2m-1$ различных наборов I_1, I_2, …, I_{2m-1}. (Действительно, если $2m-2$ набора уже выбрано, то количество оставшихся элементов не меньше $2pm-1-(2m-2)p=2p-1$.) Для каждого i, $1\leqslant i\leqslant 2m-1$, положим $a'_i=\frac{1}{p}\sum_{j\in I_i}a_j$. По предположению индукции эта последовательность содержит нуль-подпоследовательность из m элементов. Это дает нам требуемое подмножество из pm элементов с суммой, делящейся на n.

Мы почерпнули это решение в [4]. Там же приведено еще несколько решений (менее элементарных).

Вот еще одно рассуждение из [16]. Фактически это модификация решения 1.10, где вместо неравенства $s\geqslant[n/2]$ мы пользуемся утверждением задачи 3.10 (а в ее решении используется теорема Кемпермана–Шерка).

Пусть S — данная последовательность длины $2n-1$. И пусть a — элемент, содержащийся в этой последовательности с наибольшей кратностью, обозначим ее s. Если $s\geqslant n$, доказывать нечего. Пусть $s\leqslant n-1$.

Рассмотрим сдвинутую последовательность $S-a$, в ней 0 повторяется s раз. Пусть T_1 — подпоследовательность S, состоящая из всех ненулевых элементов S; в ней содержится не меньше $2n-1-s\geqslant n$ элементов. По результату задачи 1.1, T_1содержит нуль-подпоследовательность. Обозначим ее T_2 и пусть она состоит из t_2 элементов, $2\leqslant t_2\leqslant n$. Мы можем считать, что последовательность T_2 выбрана так, что ее длина — максимально возможная (среди последовательностей длины не превосходящей n).

Заметим, что если $s+t_2\geqslant n$, то мы бы сразу получили требуемую нуль-подпоследовательность, добавив к T_2 несколько нулей. Значит, $s+t_2<n$. Рассмотрим последовательность $T_3=T_1\setminus T_2$, ее длина равна

$$2n-1-s-t_2\geqslant 2n-1-(n-1)=n\,.$$

При этом кратности элементов, входящих в T_3, не превосходят s. По утверждению задачи 3.10 (при $d=1$) мы можем выбрать нуль-подпоследовательность T_4, длина которой не больше s. Тогда неравенство $s+t_2<n$ противоречит максимальности последовательности T_2, поскольку нуль-последовательность $T_2\cup T_4$ содержит больше s, но не больше $s+t_2$ элементов.

3.3. Понятно.

3.4. Мы взяли это утверждение в [8]. Утверждение очевидно, если какой-то элемент встречается в S p раз. Пусть никакой элемент не входит в S больше чем $p-1$ раз. Положим $A_1=\{a_1,\ldots,a_s\}$, а остальные элементы

S распределим канонически по $p-1$ множествам $A_2, \ldots, A_{p-1}$ (см. определение канонического разбиения в решении задачи 3.6). По теореме Коши – Дэвенпорта

$$|A_1 + \ldots + A_p| \geqslant \min\{p, \sum |A_i| - p + 1\} = \min\{p, 2p-1-p+1\} = p\,.$$

Следовательно, $A_1 + \ldots + A_p = \mathbb{Z}_p$, откуда и следует требуемое утверждение.

3.5. Композиция двух симметрий — поворот. А поворот 12-угольника мы можем интерпретировать как элемент группы $\mathbb{Z}_{12}$. Разбиваем все 47 преобразований на пары из двух симметрий или двух поворотов (преобразование, не вписавшееся в эту схему по четности, нам не потребуется). Фиксируем порядок в каждой паре. Пар — 23, композиция внутри каждой пары — поворот, далее применяем теорему Эрдеша – Гинзбурга – Зива для $n = 12$ (или утверждение задачи 1.6).

3.6. Распределим элементы T по h непересекающимся множествам $A_1, A_2, \ldots, A_h$. Для этого определим A_i как множество тех элементов T, которые входят в T с кратностью не меньше i. Такое разбиение последовательности на несколько множеств назовем *каноническим.* Отметим, что при этом множество A_1 содержит все различные элементы последовательности T.

Суммы не более чем по h элементов из T образуют множество $A_1 + \sum_{i=2}^{h} \bigl(A_i \cup \{0\}\bigr)$. По теореме Коши – Дэвенпорта

$$\Bigl|A_1 + \sum_{i=2}^{h} \bigl(A_i \cup \{0\}\bigr)\Bigr| \geqslant \min\bigl\{p,\ |A_1| + |A_2 \cup \{0\}| + \ldots + |A_h \cup \{0\}| - h + 1\bigr\} = p\,.$$

3.7. С помощью теоремы ЭГЗ будем последовательно выбирать группы по k чисел, с суммой кратной k, пока не наберем m чисел.

3.8. Это утверждение доказано в [13]. Как и в доказательстве теоремы Коши – Дэвенпорта, можно считать, что $|A|+|B|-1 \leqslant n^d$. Среди всех пар A, B, противоречащих утверждению задачи, выберем такую, в которой величина $|A|$ наименьшая. Заметим, что существует элемент $b^* \in B$, такой что $b^* + A \not\subset B$. Действительно, если бы это было не так, то для ненулевого элемента $a_1 \in A$ мы бы имели равенство $a_1 + B = B$ и, в частности, так как $0 \in B$, мы бы нашли нетривиальное представление $a_1 + b_i = 0$, что противоречит условию.

Воспользуемся элементом b^*, чтобы перестроить имеющуюся пару множеств. А именно, пусть A^* — это множество всех таких $a \in A$, для которых $a + b^* \notin B$. Положим $A' = A \setminus A^*$, $B' = B \cup (b^* + A^*)$.

Ясно, что $0 \notin A^*$, поэтому по-прежнему $0 \in A'$. Очевидно, $0 \in B'$.

Уравнение $a' + b' = 0$ для множеств A', B' имеет только тривиальное решение. Действительно, если нашлось нетривиальное решение $a_1 + (b^* + a_2) = 0$, где $a_1 \in A'$, $a_2 \in A^*$, то тогда и $(a_1 + b^*) + a_2 = 0$, что невозможно, так как $a_1 + b^* \in B$, $a_2 \in A$, $a_2 \neq 0$, а нетривиальных разложений нуля для множеств A и B не существует.

Наконец, отметим, что $A' + B' \subset A + B$.

Итак, мы построили новую пару множеств A', B', противоречащую утверждению задачи, но при этом $|A'| < |A|$. Противоречие.

Рассуждение годится для произвольной абелевой группы.

3.9. Мы почерпнули это утверждение в [11]. Заметим, что при сдвиге последовательности k-суммы не меняются, поэтому можно считать, что 0 является элементом, входящим в последовательность A с наибольшей кратностью. Обозначим через L подпоследовательность A, состоящую из всех нулей; пусть ℓ — количество элементов в L. Ясно, что $\ell \leqslant k-1$. Среди всех подпоследовательностей $A \setminus L$ длины не более $k-1$ выберем самую длинную нуль-подпоследовательность S, обозначим ее длину через s (возможно, $S = \varnothing$ и $s = 0$). Тогда $\ell + s \leqslant k - 1$, так как в противном случае, дополнив S несколькими нулями, мы получили бы нуль-подпоследовательность из k элементов.

Итак, в последовательности $A \setminus (L \cup S)$ не меньше $r+1$ элементов. Возьмем любые r из них, пусть они образуют последовательность T. Пусть h — наибольшая кратность элемента в T. Тогда $h \leqslant \ell$ по определению числа ℓ. Разобьем T каноническим образом в объединение h непересекающихся множеств (не последовательностей!) $X_1, \ldots, X_h$ и положим $X_i' = X_i \cup \{0\}$ $(i = 1, \ldots, h)$. Заметим теперь, что $0 \notin T$ и что при $1 < j \leqslant h$ никакие j элементов T не дают в сумме 0. Действительно, так как $j + s \leqslant h + s \leqslant \ell + s \leqslant k - 1$, то если бы какие-то j элементов из T давали бы в сумме 0, мы могли бы объединить эти элементы с S и получили бы более длинную нуль-подпоследовательность, что противоречит определению S. Таким образом, мы проверили, что к набору $X_1', \ldots, X_h'$ можно последовательно применять теорему Кемпермана – Шерка, что дает нам неравенство

$$|X_1' + \ldots + X_h'| \geqslant |X_1| + \ldots + |X_h| + 1 = r + 1\,.$$

Иными словами, если к последовательности T добавить h нулей из L, то полученная последовательность имеет не меньше $r+1$ различных h-сумм. Добавив оставшиеся элементы A (а их в точности $k+r-(r+h)$) к каждой из этих h-сумм, мы получим $r+1$ различных k-сумм.

Теорема ЭГЗ является частным случаем доказанного утверждения при $r=k-1$. Рассуждение верно для произвольной конечной абелевой группы.

3.10. Результат следует из теоремы Кемпермана–Шерка 3.8. Действительно, если $0 \in S$, то доказывать нечего. Пусть $0 \notin S$. Распределим элементы S каноническим образом по h непересекающимся множествам $B_1, \ldots, B_h$ (см. задачу 3.6) и положим $A_i = 0 \cup B_i$ при $1 \leqslant i \leqslant h-1$. Если уравнение $a_1 + a_2 + \ldots + a_{h-1} = 0$ имеет нетривиальное решение $a_1 \in A_1, \ldots, a_{h-1} \in A_{h-1}$ то доказывать опять нечего. В противном случае

$$|A_1 + A_2 + \ldots + A_{h-1}| \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{h-1} |A_i|\Big) - (h-1) + 1 = (n^d + h - 1 - |B_h|) - (h-1) + 1 = n^d + 1 - |B_h|.$$

Это значит, что какой-то из элементов вида $(-b)$, где $b \in B_h$ совпадает с некоторой суммой вида $a_1 + a_2 + \ldots + a_{h-1}$, $a_i \in A_i$. Тогда $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, b$ — искомая нуль-подпоследовательность.

3.11. Мы почерпнули это утверждение в [8]. При сдвиге последовательности суммы по p элементов не меняются. Следовательно, мы можем считать, что максимальную кратность h имеет элемент 0. Пусть T — последовательность, составленная из остальных элементов, s — ее сумма. Допустим, что утверждение задачи неверно и $h \leqslant p-k$. Тогда $|T| \geqslant p$. Так как при этом T не содержит нулей, то по утверждению задачи 3.6 s можно представить в виде суммы не более чем h элементов из T. Пусть Q — последовательность, состоящая из этих h элементов. Положим $T_1 = T \setminus Q$. Ясно, что сумма элементов T_1 равна 0 и $p-h \leqslant |T_1| \leqslant |T|-1$. Если бы оказалось, что $|T_1| \leqslant p$, то мы бы легко составили нуль-подпоследовательность длины p, добавив к T_1 несколько нулей. Следовательно, $|T_1| \geqslant p$. Тогда опять применим утверждение задачи 3.6 и построим подпоследовательность Q_1 не более чем из h элементов, сумма которой равна 0 ($=$ сумме элементов T_1). Положим $T_2 = T_1 \setminus Q_1$. Опять имеем, что сумма элементов T_2 равна нулю и $p-h \leqslant |T_2| \leqslant |T_1|-1$. Продолжая дальше в том же духе, мы все-таки сумеем построить нуль-подпоследовательность длины p. Противоречие.

3.12. Утверждение эквивалентно утверждению задачи 3.10.

3.13. Вот доказательство из [5]. Допустим, утверждение неверно и каждый элемент входит в S с кратностью не более $2k-n$.

Заметим сначала, что если a и $b \in S$, причем $a \neq b$, то a, b и $a+b$ — это три различных элемента S. (Это следует из того, что S не содержит нуль-подпоследовательностей.)

Лемма. Если $a, b, c \in S$ — три попарно различных элемента, то среди сумм всевозможных подмножеств множества $\{a,b,c\}$ имеется не меньше 6 различных элементов $\mathbb{Z}_n$.

Доказательство. Рассмотрим три равенства в $\mathbb{Z}_n$:

$$a+b=c, \quad a+c=b, \quad b+c=a\,.$$

Пусть выполнены хотя бы два из этих равенств (например, первое и второе). Складывая их, мы приходим к равенству $2a=0$. Поскольку n нечетно, отсюда получаем, что $a=0$, что невозможно, так как S не содержит нуль-подпоследовательностей, в том числе, одноэлементных.

Если же наоборот, по крайней мере два из равенств НЕ выполнены (пусть это опять первое и второе равенство), то мы легко можем построить 6 несовпадающих сумм: a, b, c, $a+b$, $a+c$, $a+b+c$. Действительно, если, скажем, оказалось, что $a+b+c=a$, то мы сразу получаем, что $b+c=0$, что невозможно.

Будем последовательно выбирать из S тройки попарно различных элементов. Допустим, что нам удалось выбрать j таких троек $A_1, A_2, \ldots, A_j$, после чего в последовательности осталось не более двух различных элементов: a (с кратностью λ) и $b \neq a$ (с кратностью μ), $\lambda \geqslant \mu \geqslant 0$. Очевидно, $\lambda \leqslant 2k-n$ в силу сделанного допущения. Мы можем сформировать из оставшихся элементов μ двухэлементных множеств $A_{j+1}, \ldots, A_{j+\mu}$ и $\lambda-\mu$ одноэлементных множеств $A_{j+\mu+1}, \ldots, A_{j+\lambda}$.

Мы разбили последовательность S в объединение $j+\lambda$ множеств A_i. Следовательно,

$$k = 3j + \lambda + \mu\,.$$

Для каждого множества A_i обозначим через ΣA_i множество сумм всевозможных подмножеств A_i. По лемме $|\Sigma A_i| \geqslant 6$ для трехэлементных множеств. Ясно, что $|\Sigma A_i| = 3$ для двухэлементных множеств и $|\Sigma A_i| = 1$ для одноэлементных. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{j+\lambda} |\Sigma A_i| = 6j + 3\mu + (\lambda - \mu) = 2(3j + \mu + \lambda) - \lambda = 2k - \lambda \geqslant n\,.$$

Осталось применить утверждение задачи 3.12.

Для четных n утверждение задачи также верно. В доказательство требуется внести технические поправки, связанные с тем, что в последовательности S, возможно, присутствует число $n/2$ с кратностью не больше 1.

Вот другое решение, к тому же пригодное для любой конечной коммутативной группы. Пусть никакое число в последовательности S не встречается более $2k-n$ раз. Тогда последовательность можно разбить на $2k-n$ подмножеств A_1, A_2, $\ldots$, A_{2k-n}. Пусть B_i — множество сумм всевозможных непустых подмножеств элементов из A_i, $1 \leqslant i \leqslant 2k-n$. По утверждению задачи 3.16 $|B_i| \geqslant 2|A_i|-1$. Применим теорему Кемпермана–Шерка к набору множеств $B_1 \cup \{0\}$, $\ldots$, $B_{2k-n-1} \cup \{0\}$ (это можно делать, поскольку нетривиальное решение уравнения из условия теоремы сразу дало бы нам нуль-подпоследовательность в S):

$$\begin{aligned}\left|(B_1 \cup \{0\}) + (B_2 \cup \{0\}) + \ldots + (B_{2k-n-1} \cup \{0\})\right| &\geqslant \min\bigl\{n, 2\bigl(|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_{2k-n-1}|\bigr) - (2k-n-1) + 1\bigr\} = \\ &= \min\bigl\{n, 2k - 2|A_{2k-n}| - 2k + n + 1 + 1\bigr\} = \\ &= \min\bigl\{n, n + 1 - \bigl(2|A_{2k-n}| - 1\bigr)\bigr\} > n - |B_{2k-n}|\,.\end{aligned}$$

Значит, сумма множеств в самой левой части содержит хотя бы один из элементов множества $-B_{2k-n}$, что сразу дает нам нуль-подпоследовательность в S. Это противоречит условию. Следовательно, сделанное предположение неверно.

3.14. Утверждение сразу следует из задачи 3.12 для набора одинаковых множеств.

3.15. Пусть дан набор из $2n-1$ элементов $\mathbb{Z}_n$, имеющий единственную нуль-подпоследовательность длины n. Удалим из него любой элемент, входящий в эту нуль-подпоследовательность. Тогда оставшийся набор S из $2n-2$ элементов вообще не содержит нуль-подпоследовательностей длины n. Пусть a — элемент S, имеющий наибольшую кратность, обозначим ее s. Рассмотрим сдвинутую последовательность $S-a$, в ней 0 повторяется s раз. Обозначим через S_0 подпоследовательность, составленную из этих нулей, а через T_1 — подпоследовательность S, состоящую из всех ненулевых элементов.

Ясно, что $s < n$. Если $s = n-1$, то последовательность T_1 имеет длину $n-1$ и не содержит нуль-подпоследовательностей (так как иначе, дополнив такую подпоследовательность нулями из S_0, мы получили бы нуль-подпоследовательность длины n). По утверждению задачи 1.2, последовательность T_1 состоит из $n-1$ копии некоторого элемента c. Таким образом, в рассматриваемом случае последовательность S содержит всего лишь из два различных элемента, каждый с кратностью $n-1$. Нетрудно сообразить, что отброшенный в самом начале элемент равен одному из них.

Пусть теперь $s \leqslant n-2$. Тогда подпоследовательность T_1 содержит не меньше n членов и кратность элементов в ней не превосходит s. По утверждению задачи 3.10 в T_1 можно выбрать нуль-подпоследовательность S_1 длины s_1, причем $s_1 \leqslant s$. Если $s + s_1 \geqslant n$, то мы построим нуль-подпоследовательность длины n, дополнив подпоследовательность S_1 нулями из S_0. Если $s + s_1 \leqslant n-2$, выберем из $T_2 = T_1 \setminus S_1$ нуль-подпоследовательность S_2 длины s_2, $s_2 \leqslant s$. Далее, если $s + s_1 + s_2 \geqslant n$, то мы построим нуль-подпоследовательность длины n, дополнив $S_1 \cup S_2$ нулями. Если нет — построим новую подпоследовательность S_3 и т.д. Эти построения кончатся тем, что мы либо построим-таки на очередном шаге нуль-подпоследовательность длины n, либо придем к случаю, когда построено несколько нуль-подпоследовательностей S_1, S_2, $\ldots$, S_k и для их длин выполнено соотношение $s + s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n-1$.

Если T_{k+1} не содержит больше нуль-подпоследовательностей, то по результату задачи 1.2 T_{k+1} состоит из одинаковых элементов, т. е. содержит элемент кратности $n-1$. Это значит, что $s \geqslant n-1$, что противоречит условию разбираемого случая. Если же T_{k+1} содержит нуль-подпоследовательность U длины, скажем, u (теперь уже не обязательно $u \leqslant s$), то $s + s_1 + s_2 + \ldots + s_k + u \geqslant n$. Убирая из последовательности $S_0 \cup S_1 \cup \ldots S_k \cup U$ подходящее число последовательностей S_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и несколько нулей из S_0, мы все-таки построим нуль-подпоследовательность длины n.

3.16. Это частный случай еще одной теоремы Эрдеша и Эгглтона [7]. Пусть $f(k)$ обозначает наименьшее возможное число элементов $\mathbb{Z}_n^d$, которые представимы в виде сумм подпоследовательностей какой-либо последовательности S, состоящей из k элементов и не содержащей нуль-подпоследовательностей. Нам нужно доказать, что $f(k) \geqslant 2k-1$. Докажем это индукцией по k.

Очевидно, $f(1) = 1$.

Допустим, что $f(k) \geqslant 2k-1$ при некотором k. Рассмотрим последовательность $S = (a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$, не содержащую нуль-подпоследовательностей, и проверим, что в виде суммы элементов S можно представить не менее $2k+1$ элементов.

Случай 1. Какой-то из элементов S не представим в виде суммы подпоследовательности элементов S. Пусть это a_{k+1}. По предположению индукции множество всевозможных сумм элементов $S \setminus \{a_{k+1}\}$ состоит не менее чем из $2k-1$ элементов, и при этом в него не входят ни a_{k+1}, ни $\sum_{i=1}^{k+1} a_i$ (поскольку иначе разность этой суммы и предыдущей определяла бы нуль-подпоследовательность). Таким образом, с помощью S можно представить не менее $2k+1$ элементов.

Случай 2. Каждый элемент S представим в виде суммы некоторых из остальных k элементов. Напомним, что при этом S не содержит нуль-подпоследовательностей. Тогда множества $A = B = \{0, a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ удовлетворяют условию теоремы Кемпермана – Шерка. Следовательно, $|A| + |B| \geqslant 2k+3$. При этом всякий элемент вида $2a_j$ представим в виде "a_j + сумма некоторых элементов S, не равных a_j". Таким образом, каждый ненулевой элемент множества $A+B$ представим в виде суммы элементов из S. Значит, этих элементов даже не меньше чем $2k+2$.

3.17. Мы взяли это утверждение в [8]. Поскольку речь опять идет о p-суммах, последовательности можно сдвигать. Тогда можно считать, что в последовательность a_n один раз входит элемент 0 и по два раза — все остальные элементы $\mathbb{Z}_p$. Тогда

$$(a_n) = (0, z),\ (1, x_1), (1, y_1),\ (2, x_2), (2, y_2),\ \dots,\ (p-1, x_{p-1}), (p-1, y_{p-1})\,,$$

где $x_i \neq y_i$ при всех i (так как (i, x_i) и (i, y_i) разные элементы множества M). Заметим, что $0+1+2+\ldots+(p-1) = 0$ в $\mathbb{Z}_p$. Положим $C_i = \{x_i, y_i\}$. По теореме Коши – Дэвенпорта 3.3

$$|C_1 + C_2 + \ldots + C_{p-1}| \geqslant 2(p-1) - (p-1) + 1 = p\,.$$

Это значит, что нулевой элемент может быть записан в виде $0 = \sum_{i=0}^{p-1} z_i$, где $z_0 = z$, а при всех остальных i элемент z_i — это или x_i или y_i. Это разложение нуля и определяет требуемую нуль-подпоследовательность в M.

3.18. Это результат Олсона [14]. То, что искомая величина не меньше $d(p-1)$, показывает простой пример: возьмем d "базисных" векторов $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на i-м месте), $1 \leqslant i \leqslant d$, причем каждый вектор возьмем с кратностью $p-1$.

А вот в другу-у-у-ю-у сторону ...

3.19. В [4] этот факт доказан алгебраически.

3.20.

3.21.

Литература

[1] Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. М: Дрофа, 1998.

[2] Alon N. Subset sums // J. Number Theory. 1987. Vol. 27. P. 196–205.

[3] Alon N., Dubiner M. A lattice point problem and additive number theory // Combinatorica. 1995. Vol. 15. P. 301–309.

[4] Alon N., Dubiner M. Zero-sum sets of prescribed size. In: Combinatorcs, Paul Erdős is Eighty. Bolyai Society, Math. Studies, Keszthely. Hungary, 1993. P. 33–50.

[5] Bovey J. D., Erdős P., Niven I. Conditions for a zero sum modulo n // Canad. Math. Bull. 1975. Vol. 18. № 1. P. 27–29.

[6] Davenport H. On the addition of residue classes // J. London Math. Soc. 1935. Vol. 10. P. 30–32.

[7] Eggleton R. B., Erdős P. Two combinatorial problems in group theory // Acta Arithmetica. 1972. Vol 19. P. 111-116.

[8] Gao W.D., Thangadurai R. A variant of Kemnitz conjecture // J. of Comb. Theory. Ser. A. 2004. Vol. 107. P. 69–86.

[9] Halberstam H., Roth K.F., Sequences. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1966.

[10] Harborth H. Ein Extremalproblem für Gitterpunkte // J. Reine Angew. Math. 1973. Vol. 262/263. P. 356-360.

[11] Hong Bing Yu. A simple proof of a theorem of Bollobás and Leader // Proc. of the AMS. 2002. Vol. 131. № 9. P. 2639–2640.

[12] Kemnitz A. Exremalprobleme für Gitterpunkte. Ph.D.Thesis. Technische Universität Braunschweig, 1982.

[13] Moser L., Scherk P. Distinct elements in a set of sums // Amer. Math. Monthly. 1955. Vol. 62. P. 46–47.

[14] Olson J.E., A combinatorial problem on finite Abelian groups, II // J. Number Theory. 1969. Vol. 1. P. 195–199.

[15] Olson J.E., An addition theorem modulo p // J. Comb. Theory. 1968. Vol. 5. P. 42–52.

[16] Thangadurai R. Non-canonical extensions of Erdős–Ginzburg–Ziv theorem // Integers: Electronic J. of Comb. Number Theory. 2002. V. 2.