Алгебраические группы и проблема Бернсайда

А. Я. Канель-Белов И. А. Иванов-Погодаев А. С. Малистов

Данный проект посвящен комбинаторно-геометрическому методу, позволившему решить несколько сложных проблем в теории групп, в том числе построить бесконечную конечно-порожденную группу с тождеством $\boldsymbol{x^n = 1}$ (ограниченная проблема Бернсайда). Эта конструкция является главной целью настоящего цикла. В основном, мы будем следовать построениям А. Ю. Ольшанского. Суть метода состоит в существовании наглядной геометрической интерпретации вывода следствий при изучении абстрактных алгебраических объектов.

После введения некоторых полезных понятий, мы перейдем к построению диаграмм на плоскости, обычно представляющих собой карту из многоугольников. В этом смысле полезны следующие вводные задачи.

♦ **A1.** *Выпуклый* 1993*-угольник разрезан на выпуклые семиугольники. Докажите, что найдутся четыре соседние вершины* 1993*-угольника, принадлежащие одному семиугольнику.* (*Вершина семиугольника не может лежать внутри стороны* 1993*-угольника.*)

♦ **A2.** *Можно ли разрезать плоскость:* a) *на выпуклые семиугольники;* b) *на одинаковые выпуклые семиугольники*?

♦ **A3.** *Можно ли разрезать плоскость на выпуклые семиугольники так, чтобы любой единичный круг пересекал не более миллиона из них*?

♦ **A4.** *Плоскость разбита на выпуклые семиугольники, диаметры которых не превышают* 1*. Пусть $n(R)$ — количество семиугольников, попавших в круг радиуса R с центром в начале координат. Доказать, что существуют числа R_0 и $\lambda > 1$ такие, что для всех $R > R_0$ верно $n(R) \geqslant \lambda^R$.*

Рассмотрим конечный алфавит $\boldsymbol{L}$, состоящий из букв

$$\boldsymbol{a,\ a^{-1},\ b,\ b^{-1},\ c,\ c^{-1},\ \ldots}$$

В наш алфавит буквы входят парами: $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a^{-1}}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b^{-1}}$ и так далее. Такие буквы будем называть *обратными*. Из букв можно составлять слова —- произвольные конечные последовательности букв — например: $\boldsymbol{aba}$, $\boldsymbol{aba^{-1}ab^{-1}c}$, $\boldsymbol{a^{-1}a^{-1}bbca^{-1}}$. Слова можно преобразовывать, убирая или вставляя пары рядом стоящих обратных букв. Так, слово $\boldsymbol{aba^{-1}ab^{-1}c}$ приводится к виду $\boldsymbol{ac}$: $\boldsymbol{ab\underline{a^{-1}a}b^{-1}c \equiv a\underline{bb^{-1}}c \equiv ac}$. Некоторые слова (например, $\boldsymbol{b^{-1}aa^{-1}b}$) можно привести к пустому слову, которое будем обозначать как $\mathbf{1}$.

Зададим несколько слов, равных $\mathbf{1}$ по определению, например: $\boldsymbol{\{aba^{-1}b^{-1} = 1;\ ca = 1\}}$. Такие равенства будем называть *определяющими соотношениями*. Из них можно извлекать следствия. Например, возьмем соотношение $\boldsymbol{aba^{-1}b^{-1} = 1}$ и допишем справа в обоих частях этого равенства слово $\boldsymbol{ba}$ (это называется “умножим справа на $\boldsymbol{ba}$”). Получим равенство $\boldsymbol{aba^{-1}b^{-1}ba = ba}$. Сокращаем в левой части обратные буквы и получаем $\boldsymbol{ab = ba}$. Теперь допишем в начале обоих частей равенства $\boldsymbol{c}$ (“умножим слева на $\boldsymbol{c}$”). Получим $\boldsymbol{cab = cba}$. Пользуясь $\boldsymbol{ca = 1}$, получаем $\boldsymbol{b = cba}$.

Итак, задание определяющих соотношений приводит к тому, что некоторые слова становятся *эквивалентными* или *равными*: одно можно привести к другому пользуясь определяющими соотношениями и сокращениями обратных букв. Допустим, нам известны определяющие соотношения. Можно ли узнать по заданной паре слов, равны они или нет? Оказывается, общего алгоритма для этого не существует, и это очень серьезный результат в высшей алгебре. Однако, если определяющие соотношения удовлетворяют некоторым ограничениям, такой алгоритм может существовать.

Основной вопрос. Пусть для любой пары определяющих соотношений $\boldsymbol{A} = \mathbf{1}$ и $\boldsymbol{B} = \mathbf{1}$ их общее начало либо пусто, либо по длине составляет менее $^1/_6$ от длины $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Тогда существует алгоритм, позволяющий для любой пары слов выяснить, равны они или нет.

К основному вопросу мы вернемся, сначала попрактиковавшись на более простых примерах. Везде далее мы предполагаем, что алфавит состоит только из букв, упоминаемых в определяющих соотношениях.

Рассмотрим еще один вывод следствия из определяющих соотношений. Пусть $\boldsymbol{aba} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{bab} = \mathbf{1}$. Докажем, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Действительно, $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{abaa^{-1}b^{-1}} \equiv \boldsymbol{a^{-1}b^{-1}} \equiv \boldsymbol{a^{-1}b^{-1}bab} \equiv \boldsymbol{b}$. Таким образом, при данных определяющих соотношениях существует только три неэквивалентных слова: $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a^2}$.

В дальнейшем, если в слове встречается повторяющаяся буква, будем использовать в записи степень: например, писать $\boldsymbol{a^3}$ вместо $\boldsymbol{aaa}$. Для отрицательных степеней по определению будем считать $\boldsymbol{x^k = (x^{-1})^{-k}}$. К примеру, $\boldsymbol{a^{-3} = (a^{-1})^3}$.

⧫ **В1.** *Пусть имеется одно определяющее соотношение* $\boldsymbol{ba = ab}$. *Докажите, что тогда любое слово можно привести к виду* $\boldsymbol{a^m b^n}$, *где* $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ *– некоторые целые числа.*

⧫ **В2.** *Сколько существует различных слов, если заданы определяющие соотношения:* $\boldsymbol{a^4 = b^3 = (ab)^2 = 1}$?

⧫ **В3.** *Сколько существует различных слов, если заданы определяющие соотношения:* $\boldsymbol{aba^{-2}ba = b^3 = 1}$?

⧫ **В4.** *Сколько существует различных слов, если заданы определяющие соотношения:* $\boldsymbol{a^2 = b^2 = (ab)^n = 1}$?

Существует способ, позволяющий графически изобразить вывод следствия из определяющих соотношений. Представление о таком способе можно получить из рисунков, где показан вывод следствия $\boldsymbol{a^2b^3 = b^3a^2}$ из соотношения $\boldsymbol{ab = ba}$ и вывод следствия $\boldsymbol{b^6 = 1}$ из соотношений $\boldsymbol{b^2 = a}$ и $\boldsymbol{a^3 = 1}$: при обходе любой области карты читается одно из заданных определяющих слов, а при обходе границы всей карты читается следствие, если при движении против стрелки буква считается как обратная.

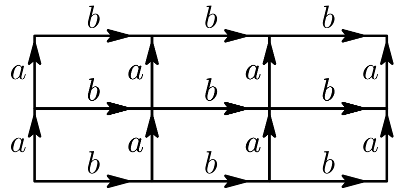

рис. 1

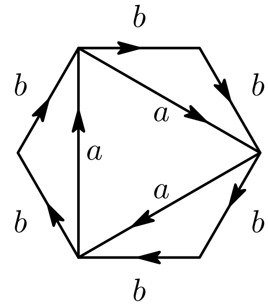

рис. 2

Итак, плоскость разбивается на несколько многоугольников. Границы многоугольников будем называть *ребрами*. Область карты, лежащую внутри какого-либо многоугольника, будем называть *клеткой*. Рядом с каждым ребром на карте пишем букву алфавита так, что слова, отвечающие обходу любой клетки отвечают какому-либо определяющему соотношению.

♦ **B5.** *Нарисуйте карту, иллюстрирующую вывод следствия* $\boldsymbol{a^2b^2c^2 = 1}$ *из соотношений* $\boldsymbol{a^3 = 1}$, $\boldsymbol{b^3 = 1}$, $\boldsymbol{c^3 = 1}$, $\boldsymbol{cba = 1}$.

♦ **B6.** *Нарисуйте карту, иллюстрирующую вывод следствия* $\boldsymbol{ab^{-1}aba^{-1}b = 1}$ *из соотношений* $\boldsymbol{a^3 = 1}$, $\boldsymbol{b^3 = 1}$, $\boldsymbol{abab = 1}$.

На самом деле, обсуждаемые нами структуры слов с соотношениями имеют свое название. Пусть имеется множество G. Пусть на этом множестве определен некоторый закон, по которому каждой упорядоченной паре элементов (x, y) сопоставлен некоторый элемент z. Будем обозначать это соответствие с помощью значка $*$: $z = x*y$. При этом говорят, что на множестве определена операция $*$. Заметим, что в общем случае результат операции зависит от порядка двух элементов: $x * y$ и $y * x$ различны.

Обычно рассматриваются такие операции, что $(x * y) * z = x * (y * z)$ для любых элементов x, y, z. В этом случае говорят, что выполнена *ассоциативность* (*или операция* $*$ *ассоциативна*).

На множестве слов в конечном алфавите можно ввести операцию произведения: произведением двух слов $\boldsymbol{a_1a_2\dots a_k}$ и $\boldsymbol{b_1b_2\dots b_n}$ считается слово $\boldsymbol{a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_n}$ — результат приписывания второго слова к первому. Очевидно, что эта операция ассоциативна. Смысл ассоциативности состоит в том, что результат произведения $\boldsymbol{x_1 * x_2 * \dots * x_n}$ не зависит от расстановки скобок, то есть произведения $\boldsymbol{(x_1*x_2)*(x_3*x_4)}$ и $\boldsymbol{x_1*((x_2*x_3)*x_4)}$ дают один и тот же результат.

Определение. Множество $\boldsymbol{G}$ с определенной на нем операцией $*$ называется *группой*, если выполнены три условия:

(i) Операция $*$ ассоциативна, то есть для любых $\boldsymbol{x, y, z \in G}$ выполнено равенство $\boldsymbol{(x * y) * z = x * (y * z)}$;

(ii) В $\boldsymbol{G}$ существует элемент, обозначаемый $\mathbf{1}$, такой, что $\boldsymbol{x * 1 = 1 * x = x}$ для любого элемента $\boldsymbol{x \in G}$; элемент $\mathbf{1}$ называется единицей;

(iii) Для любого элемента $\boldsymbol{x \in G}$ существует обратный элемент $\boldsymbol{x^{-1} \in G}$, такой что $\boldsymbol{x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1}$.

Для удобства записи, если понятно о какой операции идет речь, знак $*$ опускают, и пишут, например, $ab = c$ или $xy = yx$. Мы будем этим пользоваться.

Слова в алфавите, которые мы обсуждали, образуют группу: единицей в ней является пустое слово (которое мы обозначаем значком 1), а обратное слово получается из данного заменой всех букв на обратные и выписыванием слова в обратном порядке. Например, обратным для $abcdxyz$ будет слово $z^{-1}y^{-1}x^{-1}d^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}$, а для $ab^{-1}cab^{-1}a^{1}$ будет слово $aba^{-1}c^{-1}ba^{-1}$. Если приписать обратные слова друг к другу, получившиеся произведение можно преобразовать до пустого слова (единицы).

После введения определяющих соотношений некоторые слова становятся эквивалентными: можно считать, что они представляют один элемент группы. При выполнении операций с каким-то элементом группы можно выбирать любое из представляющих этот элемент эквивалентных слов.

Группа G называется *конечной*, если конечно множество ее элементов. Число элементов конечной группы называют ее *порядком* и обозначают $|G|$.

Группа называется *абелевой* (или *коммутативной*) если $xy = yx$ выполнено для всех $x, y \in G$.

♦ **B7.** *Докажите, что если для любого элемента x выполнено $x^2 = 1$, то группа абелева.*

Определение. *Подгруппой* группы G называются непустое подмножество $H \subset G$ такое, что:

(i) если $a, b \in H$, то $ab \in H$;

(ii) если $a \in H$, то $a^{-1} \in H$.

Из определения сразу вытекает, что единица группы G содержится в H (возьмем $a \in H$, тогда $a^{-1} \in H$, и $aa^{-1} \in H$). Следовательно, H является группой относительно операции, определенной в G.

Заметим, что в любой группе есть две тривиальные подгруппы: вся группа и группа из одной единицы. Эти подгруппы называются *несобственными*. Остальные называются *собственными*. Как находить собственные подгруппы? Возьмем некоторый элемент $a \in G$ и будем возводить его в разные степени. Подмножество $\{a^k\}$, где k — целое число является абелевой (коммутативной) подгруппой в G. Такие подгруппы называются *циклическими* подгруппами группы G, а элемент a – *порождающим* элементом. Подгруппа, *порожденная* элементом a обозначается $\langle a\rangle$. Если $\langle a\rangle = G$, то есть a порождает всю группу, G называется *циклической группой*.

Если $a^k = 1$ при каком-либо натуральном k, то существует такое минимальное n, что $a^n = 1$. Такое n называется *порядком* элемента a. Если же никакая степень элемента a не равна единице, то говорят, что элемент имеет бесконечный порядок.

Циклическая группа порождается одним своим элементом. Что получится, если в качестве порождающего множества использовать несколько элементов?

Пусть S — подмножество в G. Обозначим как $\langle S\rangle$ подмножество в G, состоящее из всевозможных конечных произведений

$$g_1{}^{\alpha_1} g_2{}^{\alpha_2} \cdots g_k{}^{\alpha_k},$$

где $g_i \in S$, $\alpha_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, k$. Ясно, что $\langle S \rangle$ является подгруппой в G, причем обратным элементом к выписанному произведению будет

$$g_k{}^{\beta_k} g_{k-1}{}^{\beta_{k-1}} \ldots g_1{}^{\beta_1},$$

где $\beta_i = -\alpha_i$. Подгруппа $\langle S \rangle$ называется подгруппой, порожденной в G подмножеством S, а сами элементы S – порождающими элементами для этой подгруппы.

До сих пор мы рассматривали слова как конечные последовательности букв. Однако, когда мы изображаем какое-нибудь определяющее отношение $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ графически в виде цикла стрелок, фактически теряется информация, какая буква является первой в слове, так как для циклических сдвигов нашего слова ($a_2 a_3 \ldots a_n a_1$, $a_3 a_4 \ldots a_n a_1 a_2$ и так далее) цикл стрелок будет точно такой же. Таким образом, имеет смысл вместо обычного слова рассматривать *циклическое слово*: совокупность всех его циклических сдвигов. Подслово (нециклическое!) циклического слова X это подслово одного из циклических сдвигов обычного слова X. Например, в список подслов длины 3 циклического слова a^2ba входят a^2b, aba, ba^2, a^3. Будем называть слово *циклически несократимым*, если все его циклические сдвиги несократимы в обычном смысле.

В группах циклические сдвиги имеют свой аналог. Два элемента a и b группы G будем называть *сопряженными*, если существует такой элемент $x \in G$, что $a = xbx^{-1}$. Ясно, что все циклические сдвиги одного слова попарно сопряжены.

♦ **B8.** *Докажите, что в группе, заданной некоторыми определяющими соотношениями, каждое слово сопряжено с циклически несократимым.*

♦ **B9.** *Пусть группа задана определяющими соотношениями $U_1 = 1$, …, $U_k = 1$. Докажите, что если $W \equiv 1$ (слово W приводится к пустому), то существуют такие слова X_1, …, X_n, что слово*

$$X_1 U_{i_1}^{\pm 1} X_1{}^{-1} X_2 U_{i_2}^{\pm 1} X_2^{-1} \ldots X_n U_{i_n}^{\pm 1} X_n^{-1},$$

где $1 \leqslant i_j \leqslant k$, приводится к W только сокращениями рядом стоящих взаимно-обратных элементов.

Если в некоторой группе выполнены соотношения $a^3 = 1$, $bab^{-1} = c$, то очевидно, выполняется и соотношение $c^3 = 1$. Этот вывод можно отразить с помощью рисунка 3. Обход внутренней треугольной клетки против часовой стрелки дает слово a^3, обход любой из четырехугольных клеток — $cba^{-1}b^{-1}$, а проводя обход границы всего рисунка получаем слово c^3, левую часть следствия соотношений $a^3 = 1$ и $cba^{-1}b^{-1} = 1$.

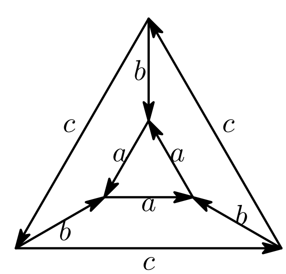

рис. 3

Опишем, как строятся подобные примеры. Для этого подробнее проведем вывод следствия $a^3b^{-1}a^2b^3 = 1$ из соотношений $a^3 = 1$ и $b^2 = a$ (то есть $b^2a^{-1} = 1$). Сначала запишем слово $a^3b^{-1}a^2b^3$ в виде $(a^3)(b^{-1}a^3b)(b^{-1}a^{-1}b^2b)$. Тем самым мы записываем наше слово в виде произведения определяющих слов и их сопряженных. Изобразим сомножители в виде трех последовательных лепестков (см рис. 4.)

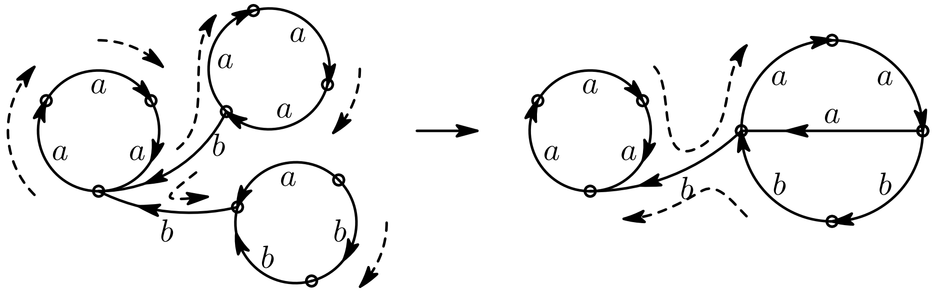

рис. 4

Каждый из них нарисован в виде круга с ножкой (возможно, пустой). Окружности размечаются так, чтобы прочитать соответствующее определяющее слово (в данном примере, $\boldsymbol{a^3}$ или $\boldsymbol{a^{-1}b^2}$), а на ножке написано сопрягающее слово (в данном примере, $\boldsymbol{b^{-1}}$ или пустое слово). Тогда, обходя последовательно лепестки, можно прочитать правую часть равенства

$$\boldsymbol{a^3b^{-1}a^2b^3 = (a^3)(b^{-1}a^3b)(b^{-1}a^{-1}b^2b).}$$

Чтобы получить слово, графически совпадающее с левой частью этого равества, нужно дополнительно провести сокращения. Эти сокращения в слове, записанном на контуре рисунка, можно осуществить путем последовательных склеиваний соседних ребер контура с одинаковыми метками (и согласованно направленными стрелками). В данном примере, сначала склеиваются ножки, потом по одному ребру второй и третьей окружностей. В результате получается диаграмма, на контуре которой написано в точности слово $\boldsymbol{a^3b^{-1}a^2b^3}$.

Таким же способом можно построить диаграмму вывода любого следствия определяющих соотношений. Причем, даже для одного следствия $\boldsymbol{W = 1}$ диаграммы могут быть клеточно неэквивалентны.

♦ **C1. Лемма ван Кампена.** *Пусть $\boldsymbol{W}$ – произвольное непустое слово в алфавите $\boldsymbol{\bar{L} = L \cup L^{-1} \cup 1}$. Слово $\boldsymbol{W = 1}$ в группе с определяющими соотношениями $\boldsymbol{U}$ тогда и только тогда, когда существует диаграмма над $\boldsymbol{U}$, метка контура которой графически равна $\boldsymbol{W}$.*

Пусть группа задана определяющими соотношениями $\boldsymbol{U = \{U_1 = 1, \ldots, U_k = 1\}.}$ Условимся, что каждое слово $\boldsymbol{U_i}$ выбирается не только несократимым, но и циклически несократимым. Пусть, кроме того, вместе с каждым словом $\boldsymbol{R}$ в систему определяющих соотношений входит и графически обратное слово $\boldsymbol{R^{-1}}$ и если $\boldsymbol{XY}$ — некоторое определяющее слово, то $\boldsymbol{YX}$ — тоже некоторое определяющее слово. Систему отношений, в которой выполняются все эти условия, назовем *симметризованной.* Ясно, что добавление обратных слов и циклических сдвигов не меняет множества всех следствий, а значит и группы $\boldsymbol{G}$.

Если $\boldsymbol{XY_1}$ и $\boldsymbol{XY_2}$ — различные слова из $\boldsymbol{U}$ с общим началом $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{X}$ называется *куском* относительно $\boldsymbol{U}$. Говорят, что группа $\boldsymbol{G}$, заданная определяющими соотношениями $\boldsymbol{U}$ является *группой малых сокращений*, если любой кусок $\boldsymbol{X}$ имеет длину, меньшую чем $1/6$ длины любого из слов в которое он входит. Это условие означает, что в произведении любых двух определяющих слов $\boldsymbol{U_iU_j}$ сокращается малая часть. Этим оправдывается название «условие малых сокращений».

Роль условия малых сокращений состоит в том, что в следствиях остается много «следов» определяющих соотношений.

♦ **C2.** *Пусть* G *— группа с условием малых сокращений. Рассмотрим диаграмму над* G*. Пусть метка* $\phi(q)$ *контура циклически несократима и в циклическом слове* $\phi(q)$ *нет собственных подслов, равных в* G *единице. Тогда существует клетка* P*, внешняя дуга которой имеет длину более половины периметра клетки.*

♦ **C3.** *Пусть* G *— группа с условием малых сокращений, заданная набором определяющих соотношений. Докажите, что существует алгоритм, позволяющий по заданным двум элементам определить, равны они или нет, то есть эквивалентны ли слова, представляющие эти элементы.*

Добавления

♦ **A5.** *Можно ли разрезать плоскость на выпуклые семиугольники с диаметром не более 1 так, чтобы любой единичный круг пересекал не более миллиона из них?*

♦ **B7.5a.** *Рассмотрим группу с алфавитом* $\{a, b\}$*. Докажите, что если для любого элемента* x *из группы выполнено* $x^3 = 1$*, то группа конечна.*

♦ **B7.5b.** *Рассмотрим группу с алфавитом* $\{a, b, c\}$*. Докажите, что если для любого элемента* x *из группы выполнено* $x^3 = 1$*, то группа конечна.*

Дополнительные соображения

Введем формальные определения. Произвольное разбиение плоскости на многоугольники-клетки U в дальнейшем будем называть *картой*. Ориентированные стороны разбиения U называем *ребрами карты*. Таким образом, вместе с каждым ребром e в U появляется и ребро e^{-1} с противоположной ориентацией (состоящее из тех же точек поверхности, что и сторона в U). Примем соглашение, по которому контуры всех клеток обходятся по часовой стрелке. Если компонента Y края состоит из n сторон, то, в соответствии с определенной на Y ориентацией, эти стороны можно задать ребрами $e_1, e_2, \dots e_n$, такими что $e_1 \dots e_n$ – петля, которую назовем *контуром* карты U. Аналогично можно определить контур клетки. Контур карты мы будем часто рассматривать с точностью до циклического сдвига. Если ребро e входит в контур $e_1 \dots e_n$ (клетки или карты), то будем говорить, что e *принадлежит контуру* (соответственно, клетки или карты). Цепочку ребер e_1, e_2, $\dots$, e_n, такую, что конец e_i совпадает с началом e_{i+1} для всех $i = 1, \dots, n-1$, будем называть *путем*.

Понятие подпути аналогично понятию подслова: путь p – *подпуть* q, если $q = p_1p_2$ для некоторых путей p_1, p_2. Пусть есть некоторый конечный алфавит L. Обозначим $\bar{L} = L \cup L^{-1} \cup 1$, где L^{-1} – алфавит обратных букв.

Пусть далее каждому ребру e карты U сопоставляется некоторая буква $\phi(e)$ из $\bar{L}$. Если при этом $\phi(e^{-1}) = \phi(e)^{-1}$, то карту U назовем *диаграммой над* U. Для пути

$p = e_1 \dots e_n$ в диаграмме U над L *меткой* $\phi(p)$ называется слово $\phi(e_1)\dots\phi(e_n)$ в алфавите $\bar{L}$. Если $n = |p| = 0$, то $\phi(p) = 1$ по определению. Метка контура клетки или диаграммы определена с точностью до циклического сдвига, то есть это циклическое слово.

Назовем клетку K R-*клеткой*, если метка $\phi(p)$ ее контура графически равна (с точностью до циклического сдвига) некоторому слову из числа определяющих соотношений или обратному к ним с точностью до вставки нескольких символов $\mathbf{1}$. (Ясно, что выбирая начало и направление обхода и игнорируя символ $\mathbf{1}$ всегда можно прочитать слово из определяющего соотношения.)

Клетку K назовем 0-*клеткой*, если метка W ее контура $e_1 \dots e_n$ графически равна $\phi(e_1)\dots\phi(e_n)$, где все $\phi(e_i) = 1$ (графическое равенство) либо для некоторых $i \neq j$ $\phi(e_i) = a$, $\phi(e_j) = a^{-1}$, где a — буква из алфавита, а для остальных $k \neq i,\ j$ $\phi(e_k) = 1$. Ребра с меткой $\mathbf{1}$ назовем $\mathbf{0}$-*ребрами*, а ребра, метка которых нетривиальное (не равное $\mathbf{1}$) слово из алфавита, назовем U-*ребрами*. *Длина* $|p|$ произвольного пути определяется как число его U-ребер. Периметр клетки или диаграммы – это длина ее контура.

В рассмотренных выше примерах не встречается 0-клеток. Но иногда их удобно вводить по следующей причине. Примеры на рисунках 1–3 являются полноценными дисковыми диаграммами: при удалении контура они не распадаются на две части. Изображение на рисунке 4 не является диском, при удалении контура распадается на две компоненты связности. Это приводит к некоторым техническим трудностям, например, при вырезании поддиаграмм для проведения индуктивных рассуждений. С помощью 0-клеток диаграмму на рисунке 4 можно сделать дисковой (рис. 5). В дальнейшем можно представлять себе 0-клетки в виде "очень тонких" клеток (или в виде "толстых ребер"), а 0-ребра как "очень короткие" ребра по сравнению с ребрами, представляющими букву алфавита.

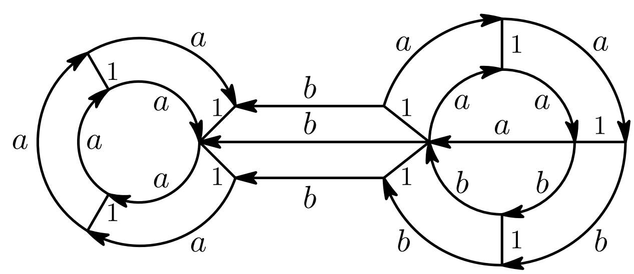

рис. 5

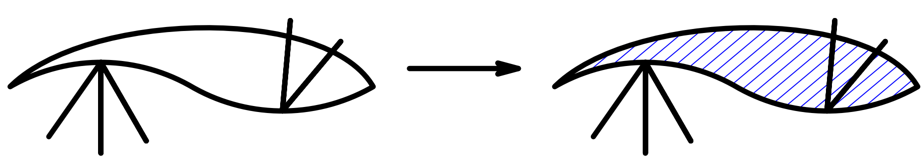

рис. 6

Итак, *диаграммой над группой* G заданной соотношениями $R_1 \dots R_n$ назовем всякую диаграмму над нашим алфавитом U, каждая клетка которой является R-клеткой или 0-клеткой.

Иногда бывает полезно проводить 0-*измельчение* диаграммы. Пусть клетка представляет собой многоугольник. Расположим внутри многоугольника меньший по размеру подобный многоугольник и соединим их соответствующие вершины. Внутренний многоугольник разметим буквами аналогично внешнему. Добавленные ребра отмечаем $\mathbf{1}$ как

0-ребра. Получаем 0-измельчение клетки. Аналогично можно провести *раздвоение* пути. Каждое ребро некоторого пути разделяем на два ребра, с аналогичной разметкой. Получается два пути, с совпадающими началом и концом.

Задачи цикла D являются подготовительными к основным задачам цикла E.

♦ **D1.** *Дана бесконечная периодическая последовательность с наименьшим периодом n и два её одинаковых подслова длины $n-1$.*

1. Докажите, что их начальные буквы находятся на расстояниях, кратных n.

2. Верно ли аналогичное утверждение для двух одинаковых подслов длины $n-2$?

♦ **D2.** *Рассматриваются слова над конечным алфавитом. Имеется конечный словарь нехороших слов. Известно, что имеется бесконечное слово без нехороших подслов. Докажите, что имеется бесконечное периодическое слово без нехороших подслов.*

♦ **D3.** *Докажите, что в алфавите из двух букв существуют слова сколь угодно большой длины, не содержащие трёх одинаковых подслов, идущих подряд (бескубные слова).* **Указание:** *рассмотреть слова a, ab, $abba$, $abbabaab$, $\ldots$ Чтобы получить следующее слово, в предыдущем производятся замены $a \to ab$, $b \to ba$.*

♦ **D4.** *Даны две различные периодические последовательности с минимальными периодами n и m соответственно. Докажите, что если они имеют общий кусок длины $m+n-1$, то они имеют сколь угодно большие общие куски.*

♦ **D5.** *Укажите точную оценку в* D4, *рассмотрев случаи взаимно простых и не взаимно простых m и n.*

♦ **D6.** *Треугольник разбит на выпуклые четырёхугольники. Докажите, что среди них найдётся четырёхугольник с углом не менее $120°$.*

♦ **D7.** *Существует ли многогранник, у которого каждая грань имеет не менее 6 сторон?*

♦ **D8.** *У многогранника не менее $7n$ граней. Докажите, что у него найдётся n граней с одинаковым числом сторон.*

♦ **D9.** *Плоскость разбита на выпуклые k-угольники диаметра, не превосходящего 1. Зафиксирована точка O. Пусть $S_k(R)$ – количество k-угольников, попавших в круг радиуса R* с центром в точке *O. Докажите, что существует R_0 такое, что для всех $R > R_0$ верно $S_k(R) \geqslant \lambda^R$, где вместо λ можно подставить $k/10$. Постарайтесь получить лучшую оценку для λ.*

♦ **D10.** *Полуплоскость разбита на выпуклые k-угольники диаметра, не превосходящего 1. Среди граничных k-угольников выделено L соседних. Первым слоем назовем такие k-угольники, которые граничат с выделенными. Граничащие с первым слоем k-угольники назовем вторым слоем. Докажите, что во втором слое k-угольников не менее $L(k/10)^2$.*

♦ **Проблема Бернсайда.** *Пусть задано натуральное число n. Существует ли конечно-порожденная (то есть в конечном алфавите) бесконечная группа, в которой любой элемент x удовлетворяет соотношению $x^n = 1$.*

А. Ю. Ольшанский построил такую группу для нечетного n, большего, чем 10^{10}. Мы будем следовать основным идеям этого построения.

Итак, наша задача разбивается на две части. Первая часть посвящена самому процессу введения определяющих соотношений. Этот процесс состоит из счетного числа шагов. На каждом шаге вы вводим несколько определяющих соотношений вида $\boldsymbol{A^n = 1}$, при этом следим за тем, чтобы любое слово на каком-либо этапе процесса стало периодичным (то есть для любого слова $\boldsymbol{X}$ соотношение $\boldsymbol{X^n = 1}$ было выводимо из определяющих соотношений, введенных за конечное число шагов). Два слова в полученной группе считаются *равными*, если одно может быть приведено к другому с использованием конечного числа определяющих соотношений, введенных на каких-либо шагах. В результате процесса получается группа, каждый элемент которой будет периодичным.

Вторая часть касается **доказательства бесконечности** группы. Для этого необходимо доказать, что после каждого очередного шага найдется слово, не равное $\mathbf{1}$. Для этого нужно доказать, что не может существовать карты, все клетки которой являются периодическими словами с достаточно большим периодом, а по периметру написано слово, не содержащее периодических подслов с большим периодом (например, бескубное или бесквадратное слово). Для доказательства этого факта проводится исследование различных случаев примыкания клеток друг к другу. Клетки отвечают введенным определяющим соотношениям на разных этапах, на этапе с большим номером слово длиннее. Таким образом, клетки могут быть разных размеров.

Сначала доказываем, что “большие” клетки не могут сильно “примыкать” друг к другу. Затем рассматривается случай, когда к большой клетке примыкает несколько “слоев” маленьких клеток. Здесь используется экспоненциальный рост количества многоугольников в задачах D9 и A4.

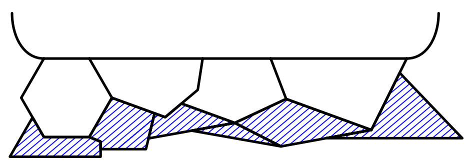

рис. 7

Таким образом, согласно задаче D9, можно за счет выбора $\boldsymbol{k}$ добиться того, чтобы уже во втором слое было очень много клеток. Выбор $\boldsymbol{k}$ (количества сторон у многоугольников) мы можем производить за счет выбора $\boldsymbol{n}$ – основной степени периодичности группы. То есть, на первом этапе длина введенных соотношений равна $\boldsymbol{n}$, на $\boldsymbol{i}$-ом этапе – $\boldsymbol{ni}$. Таким образом, многоугольники будут содержать достаточно много углов, и при экспоненциальном росте уже во втором слое будет много клеток.

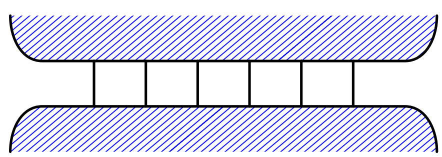

рис. 8

В оставшемся случае, между двумя большими клетками есть один слой малых клеток. Введем полезное понятие.

Клетки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются *сократимыми*, если:

1. $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют друг с другом общую границу, (либо соединяются через цепочку 0-клеток) ;

2. $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют одинаковые метки.

В случае, если в диаграмме встречаются сократимые клетки, можно проделать следующую операцию: вырезать из диаграммы диск – объединение этих двух клеток – и вставить вместо него несколько $\mathbf{0}$-клеток. Тем самым в диаграмме уменьшено число нетривиальных клеток. Диаграмма, не содержащая сократимых клеток, называется *приведённой.*

♦ **E1. Пример узкой полосы, если показатель — четный.** *Докажите, что существует приведённая диаграмма $\boldsymbol{D}$, все клетки которой суть соотношения $\boldsymbol{X^k = 1}$, имеющая следующую структуру:*

1. $\boldsymbol{D}$ содержит две клетки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, такие, что все остальные клетки соседствуют с ними;
2. Периметры клеток $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в любое наперед заданное число раз больше периметров остальных клеток.

♦ **E2.** *Пусть в приведённой диаграмме имеются клетки двух видов: «большие» из $\boldsymbol{m}$ букв и «малые» из $\boldsymbol{n}$. Метка каждой клетки – периодическое слово вида $\boldsymbol{A^n}$. Какой наибольший общий участок могут иметь две большие клетки?*

♦ **E3.** *Пусть все клетки приведенной диаграммы имеют периметр либо $\boldsymbol{m}$, либо $\boldsymbol{n}$, причем $\boldsymbol{n \gg m}$ и метки всех клеток периодичны. Рассмотрим клетку $\boldsymbol{A}$ с периметром $\boldsymbol{n}$. Пусть к ней примыкают только клетки с периметром $\boldsymbol{m}$. Назовем* первым слоем *непосредственно примыкающие к $\boldsymbol{A}$ клетки. Назовем $\boldsymbol{k}$-тым слоем ($\boldsymbol{k > 1}$) клетки, примыкающие к $\boldsymbol{k-1}$ слою. Пусть $\boldsymbol{A_k}$ количество клеток в $\boldsymbol{k}$-том слое. Докажите, что $\boldsymbol{A_k \geqslant (m/100)^k}$*

♦ **E4.** *Пусть все клетки приведенной диаграммы имеют периметр либо $\boldsymbol{m}$ либо $\boldsymbol{n}$, причем $\boldsymbol{n \gg m}$ и метки всех клеток периодичны с нечетным периодом. Пусть слой из малых клеток зажат между двумя большими клетками (см рис. 8). Верно ли, что метка контура диаграммы периодична?*