ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Первый этап

A) **Функциональное уравнение** – это уравнение, которое содержит одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений). Решить функциональное уравнение – значит найти все функции, которые тождественно ему удовлетворяют. Функциональные уравнения возникают в самых различных областях математики, обычно в тех случаях, когда требуется описать все функции, обладающие заданными свойствами.

Вначале – некоторые типичные приёмы решения функциональных уравнений. Часто бывает полезен **метод подстановок**. Он состоит в том, что переменные заменяются некоторыми новыми функциями (возможно, константами), что позволяет привести уравнение к более удобному виду.

1. Решите следующие функциональные уравнения.

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x. \tag{a}$$

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2x. \tag{b}$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos\ y. \tag{c}$$

B) Рассмотрим теперь некоторые разновидности функциональных уравнений. Во многих функциональных уравнениях задана некоторая итерация искомой функции. Следующую задачу якобы любил давать Фейнман своим молодым сотрудникам.

2. Существует ли такая функция $f(x) : R \to R$, что $f(f(x)) = x^2 - 2$ для всех вещественных x?

3. Найдите все функции $f : R^2 \to R$, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$f(\ldots f(f(x_1, x_2), x_3)\ldots, x_{2006}) = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2006}.$$

C) При решении функционального уравнения результат часто зависит от того, требуется ли от искомых функций непрерывность. В наших задачах строгое определение непрерывности не потребуется. Нужно лишь знать, что любой многочлен, экспонента, логарифм (при положительных x), синус, косинус непрерывны и что непрерывная функция всегда обладает следующими свойствами.

(a) Если в точках a и b непрерывная функция принимает различные значения, то любое промежуточное между ними значение принимается хотя бы в одной точке отрезка $[a; b]$ (теорема о промежуточном значении).

(b) Если две непрерывные функции, заданные на вещественной оси, совпадают во всех рациональных точках, то они совпадают всюду.

(c) Если непрерывная функция взаимно однозначна, то она строго монотонна. (Разумеется, верно и обратное.)

(d) Непрерывная функция на отрезке ограниченна.

При решении функциональных уравнений часто бывает также важна монотонность функции.

4. Если функция $f(x)$ строго монотонна, что можно сказать о направлении изменения функции $f(f(x))$?

5. Существует ли такая непрерывная функция $f : R \to R$, что функция $f(f(x))$ строго убывает?

6. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f(f(x)) = -x^2$ для всех вещественных x. Докажите, что $f(x) \leq 0$ для всех вещественных x.

Дополнительные вопросы к задаче 6.

(a) Существует ли вообще функция, удовлетворяющая условиям задачи?

(b) Существенно ли здесь условие непрерывности?

7. Существует ли такая непрерывная функция $f(x) : R \to R$, что $f(f(x)) = x^2 - 1/2$ для всех вещественных x? (Ср. с задачей 2.)

D) Теперь рассмотрим самое известное из функциональных уравнений - **аддитивное уравнение Коши**, которое часто называют просто **уравнением Коши**:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in R).$$

8. Найдите все непрерывные решения аддитивного уравнения Коши.

Какое из свойств (a)-(d) непрерывных функций здесь использовано? Способ решения функциональных уравнений в непрерывных функциях с использованием этого свойства называется **методом Коши**.

Как известно, $(xy)^n = x^n y^n$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ $(x, y \in R)$ и $\ln(|xy|) = \ln(|x|) + \ln(|y|)$ $(x, y \in R \setminus \{0\})$. Пользуясь этими фактами и результатом задачи 8, решите следующую задачу.

9. Найдите все непрерывные решения **уравнений Коши**:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in R \setminus \{0\}); \tag{a}$$

$$f(x+y) = f(xy) \quad (x, y \in R); \tag{b}$$

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in R). \tag{c}$$

Базис Гамеля – это такое множество вещественных чисел, что любое вещественное число можно представить, причём единственным образом, в виде $r_1\alpha_1 + \ldots r_n\alpha_n$, где n – натуральное число, $r_1, \ldots, r_n$ – рациональные числа, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ принадлежат данному базису Гамеля. Существование базиса Гамеля доказывается с помощью аксиомы выбора, мы примем его как факт.

10. Существуют ли разрывные решения аддитивного уравнения Коши? Если да, то как описать всю совокупность решений этого уравнения? Как описать решения этого уравнения, неотрицательные при $x \geq 0$?

Теперь для сравнения решите следующую задачу.

11.

$$f(x+y) = f^n(x) + f^n(y) \ (x, y \in R;\ n \text{ – фиксированное натуральное число, } n > 1).$$

E) **Уравнение Пексидера** получается из аддитивного уравнения Коши, если все вхождения функции f заменить на различные функции:

$$k(x+y) = g(x) + h(y).$$

12. (a) Решите уравнение Пексидера.

(b) Найдите все его непрерывные решения.