Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби

М. Скопенков

Решения задач, предложенных до промежуточного финиша.

1. Обозначим через O центр нашей сферы. Рассмотрим плоскость, проходящую через точки O, A и B. Пусть c — сферическая прямая, получающаяся в сечении сферы этой плоскостью. Тогда c — это в точности сферическая прямая, проходящая через точки A и B.

С другой стороны, векторы, соответствующие точкам A и B — это векторы $\vec{A} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{B} = \overrightarrow{OB}$. По определению, вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ перпендикулярен обоим векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Значит, он перпендикулярен и нашей плоскости OAB. По нашему определению, все векторы, перпендикулярные некоторой плоскости, соответствуют сферической прямой, получающейся в сечении сферы этой плоскостью. Поэтому вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой c.

Итак, вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через точки A и B.

2. Две сферические прямые пересекаются по паре диаметрально противоположных точек на сфере. Пусть точка C — одна из точек пересечения сферических прямых a и b.

Докажем, что вектор $\overrightarrow{OC}$ параллелен вектору $[\vec{a}, \vec{b}]$. Обозначим через α плоскость сферической прямой a. По определению соответствия между сферическими прямыми и векторами вектор $\vec{a}$ перпендикулярен плоскости α. Отрезок O лежит в этой плоскости, поэтому $\overrightarrow{OC} \perp \vec{a}$. мналогично, $\overrightarrow{OC} \perp \vec{b}$. Значит, векторы $\overrightarrow{OC}$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$ параллельны, а следовательно — пропорциональны.

Отсюда получаем, что вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ соответствует точке C (поскольку мы считаем, что все векторы, получающиеся из вектора $\overrightarrow{OC}$ умножением на число, соответствуют точке C.)

3. Пусть c — перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую b, то есть сферическая прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой b. Нам достаточно показать, что вектор $\vec{c}$, соответствующий прямой c, перпендикулярен обоим векторам $\vec{A}$ и $\vec{b}$. (Тогда вектор $\vec{c}$ пропорционален $[\vec{A}, \vec{b}]$, а пропорциональные вектора соответствуют одной и той же прямой.)

Докажем, что $\vec{c} \perp \vec{A}$. Рассмотрим плоскость сферической прямой c. Так как c проходит через точку A, то A лежит в этой плоскости. Поэтому $\vec{c} \perp \overrightarrow{OA} = \vec{A}$.

Докажем, что $\vec{c} \perp \vec{b}$. Так как сферические прямые b и c перпендикулярны, то содержащие их плоскости также перпендикулярны. Но тогда угол между любым вектором, перпендикулярным первой плоскости, и любым вектором, перпендикулярным второй плоскости, также равен 90°, что и требовалось.

4. *Ответ:* три точки A, B и C лежат на одной прямой.

Решение. Из условия $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ следует, что векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ параллельны некоторой плоскости π. Проведем через центр сферы плоскость, параллельную π. Тогда точки A, B и C лежат на сферической прямой, получающейся в сечении сферы этой плоскостью.

5. *Ответ:* три прямые a, b и c пересекаются в одной точке.

Решение. Из условия $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$ следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельны некоторой плоскости π. Рассмотрим точку P на сфере, такую что $OP \perp \pi$. Проверим, что все три сферические прямые a, b и c проходят через точку P. Поскольку отрезок OP перпендикулярен π, то он перпендикулярен вектору $\vec{a}$, который лежит в этой плоскости. м это значит (смотри решение задачи 3), что точка P лежит на прямой a. мналогично доказывается, что P лежит на прямых b и c.

6. Ни левая, ни правая часть тождества $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$ не изменится, если к вектору $\vec{A}$ добавить любой вектор, пропорциональный вектору $[\vec{B}, \vec{C}]$. Поэтому можно считать, что три вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ параллельны одной плоскости.

Далее, обе части нашего тождества не изменятся, если к вектору $\vec{B}$ добавить любой вектор, пропорциональный вектору $\vec{C}$. С помощью данной операции можно сделать вектор $\vec{B}$ параллельным вектору $\vec{A}$ (если только вектор $\vec{C}$ не параллелен вектору $\vec{A}$). Поэтому достаточно доказать тождество только для этих двух случаев — $\vec{B} \parallel \vec{A}$ или $\vec{C} \parallel \vec{A}$.

Пусть, для определенности, $\vec{B} \parallel \vec{A}$. Добавляя к вектору $\vec{C}$ вектор $\vec{B}$, умноженный на подходящее действительное число, мы можем добиться условия $\vec{C} \perp B$. Поэтому наше тождество достаточно доказать для случая $\vec{C} \perp B \parallel A$. В этом простейшем случае оно легко проверяется непосредственно: обе части равны $|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \vec{C}$.

Замечание. Данное тождество получается также из соображений линейности.

7. Тождество Якоби получается суммированием трех тождеств, получаемых из тождества задачи 6 циклической заменой переменных.