Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби

А. Заславский и М. Скопенков

Решения задач.

Приведем вначале таблицу, содержащую ответы ко всем задачам, в которых спрашивается о геометрическом смысле алгебраических объектов:

Алгебраический объект	Геометрический смысл
$\vec{A}$	точка A
$\vec{a}$	сферическая прямая a
$[\vec{A},\vec{B}]$	прямая, проходящая через A и B
$[\vec{a},\vec{b}]$	точка пересечения прямых a и b
$[\vec{A},\vec{b}]$	перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую b
$\vec{A}+\vec{B}$	середина отрезка AB
$(\vec{a},\vec{b})$	косинус угла между a и b
$\lvert[\vec{a},\vec{b}]\rvert$	синус угла между a и b
$(\vec{A},\vec{B})$	косинус длины отрезка AB (то есть дуги большой окружности между A и B)
$\lvert[\vec{A},\vec{B}]\rvert$	синус длины отрезка AB
$(\vec{A},\vec{b})$	синус расстояния от A до b
$\lvert[\vec{A},\vec{b}]\rvert$	косинус расстояния от A до b
$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$	1) точки A, B и C лежат на одной прямой 2) центры окружностей A, B и C лежат на одной прямой
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$	прямые a, b и c пересекаются в одной точке
$[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]]+[\vec{B},[\vec{C},\vec{A}]]+[\vec{C},[\vec{A},\vec{B}]]=0$	высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке
$[\vec{A},\vec{B}+\vec{C}]+[\vec{B},\vec{C}+\vec{A}]+[\vec{C},\vec{A}+\vec{B}]=0$	медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке
$[\vec{A},\vec{B}]+[\vec{B},\vec{C}]+[\vec{C},\vec{A}]$	центр описанной окружности треугольника ABC
$(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$	синус длины отрезка AB $\cdot$ синус расстояния от C до AB
$(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])=(\vec{B},[\vec{C},\vec{A}])=(\vec{C},[\vec{A},\vec{B}])$	теорема синусов для треугольника ABC
$(\vec{A},\vec{B})=1$	окружности A и B перпендикулярны
$\frac{[\vec{A},\vec{B}]+[\vec{B},\vec{C}]+[\vec{C},\vec{A}]}{(\vec{A},\vec{B},\vec{C})}$	окружность, перпендикулярная окружностям A, B и C
$\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}-\vec{D}=0$	существует окружность, перпендикулярная окружностям A, B, C и D
$\frac{d_B}{d_B-d_A}\vec{A}-\frac{d_A}{d_B-d_A}\vec{B}$	биссектриса окружностей A и B

8. Пусть $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ — векторы, соответствующие вершинам сферического треугольника ABC. Согласно задаче 1 вектор $[\vec{A},\vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через A и B. Тогда по задаче 3 Вектор $[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]$ соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на прямую BC, то есть прямой, содержащей высоту h_A треугольника ABC. Аналогично векторы $[\vec{B},[\vec{C},\vec{A}]$ и $[\vec{C},[\vec{A},\vec{B}]$ соответствуют прямым, содержащим две другие высоты треугольника ABC. Поэтому тождество Якоби, ввиду задачи 5, означает, что построенные три прямые пересекаются в одной точке, то есть мы получаем теорему о высотах треугольника в сферической геометрии.

9. Обозначим через $\vec{a}$ *направляющий вектор* прямой a, то есть любой вектор, параллельный прямой a. Аналогично пусть $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — направляющие векторы прямых b и c. Тогда, очевидно, вектор $[\vec{b},\vec{c}]$ параллелен общему перпендикуляру к прямым b и c, то есть прямой a'. Поэтому вектор $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$ параллелен общему перпендикуляру к прямым a и a', то есть прямой a''. Аналогично векторы $[\vec{b},[\vec{c},\vec{a}]]$ и $[\vec{c},[\vec{a},\vec{b}]]$ параллельны прямым b'' и c'' соответственно. Из тождества Якоби следует, что три последних вектора параллельны одной плоскости. Значит, и три прямые a'', b'' и c'' параллельны одной плоскости.

10. Из соображений симметрии легко следует, что вектор $\vec{A}+\vec{B}$ соответствует середине дуги большой окружности, проходящей через точки A и B. Эту точку естественно считать *серединой* сферического отрезка с концами A и B.
Замечание. Поскольку сферическая прямая представляет собой окружность, и мы не различаем диаметрально противоположные точки на сфере, то пара точек A и B на прямой определяет не один, а два отрезка. Если *один* из единичных векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ заменить на противоположный, то их сумма будет соответствовать середине другого отрезка с концами A и B.

11. Пусть $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ — единичные векторы, идущие в точки A, B и C из центра сферы. Тогда по задаче 10 вектор $\vec{B}+\vec{C}$ соответствует середине сферического отрезка с концами B и C. Тогда по задаче 1 вектор $[\vec{A},\vec{B}+\vec{C}]$ соответствует

медиане сферического треугольника ABC. А тогда, по задаче 5, тождество $[\vec{A}, \vec{B}+\vec{C}]+[\vec{B}, \vec{C}+\vec{A}]+[\vec{C}, \vec{A}+\vec{B}]=0$ означает, что медианы сферического треугольника ABC пересекаются в одной точке.
Теорему о медианах сферического треугольника можно доказать также, рассматривая вектор $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$.
Замечание. (А. Мафусалов) Оказывается, у теоремы о медианах сферического треугольника есть 'внешние' аналоги (как у теоремы о биссектрисах треугольника), отсутствующие в евклидовой геометрии. А именно, назовем *внешней медианой* m_A сферического треугольника ABC сферическую прямую, проходящую через точку A и середину дуги BC', где точка C' на сфере диаметрально противоположна точке C. Тогда, оказывается, что *две внешние медианы* m_A *и* m_B*, и одна внутренняя (то есть обычная) медиана* m_C *пересекаются в одной точке.* Эта теорема есть в точности утверждение о пересечении (обычных) медиан, но для треугольника ABC'.
12. Докажем сначала, что векторы $\vec{A}-\vec{B}$, $\vec{B}-\vec{C}$ и $\vec{C}-\vec{A}$ соответствуют *серединным перпендикулярам* к сторонам сферического треугольника ABC. Действительно, поскольку

$$(\vec{A}-\vec{B}, \vec{A}+\vec{B})=(\vec{A}, \vec{A})-(\vec{B}, \vec{B})=1-1=0,$$

то прямая, соответствующая вектору $\vec{A}-\vec{B}$, проходит через середину сферического отрезка AB. А поскольку

$$(\vec{A}-\vec{B},[\vec{A}, \vec{B}])=(\vec{A},[\vec{A}, \vec{B}])-(\vec{B},[\vec{A}, \vec{B}])=0,$$

то эта прямая перпендикулярна отрезку AB. Значит, вектор $\vec{A}-\vec{B}$ соответствует серединному перпендикуляру к отрезку AB.
Обозначим $\vec{V}=[\vec{A}, \vec{B}]+[\vec{B}, \vec{C}]+[\vec{C}, \vec{A}]$, и пусть V — точка на сфере, которая соответствует этому вектору. Проверим, что точка V лежит на всех трех построенных серединных перпендикулярах. Действительно, поскольку

$$(\vec{V}, \vec{A}-\vec{B})=([\vec{B}, \vec{C}], \vec{A})-([\vec{C}, \vec{A}], \vec{B})=0,$$

то точка V лежит на серединном прямой, соответствующей вектору $\vec{A}-\vec{B}$. Аналогично доказывается, что V лежит на двух других серединных перпендикулярах. Итак, V — центр описанной окружности треугольника ABC.
Замечание. То, что три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, следует также из тождества $(\vec{A}-\vec{B})+(\vec{B}-\vec{C})+(\vec{C}-\vec{A})=0$ и задачи 5.
13. Дадим вначале два естественных определения, необходимых, чтобы сформулировать ответ к этой задаче (приведенный выше). Назовем *углом* между двумя сферическими прямыми угол между касательными к ним в их точке пересечения. (Это то же самое, что угол между плоскостями, в которых лежат данные сферические прямые). Назовем *длиной* сферического отрезка AB длину дуги большой окружности, проходящей через точки A и B.
Решение этой задачи сразу получается из формул $(\vec{a}, \vec{b})=|\vec{a}| \cdot|\vec{b}| \cdot \cos \gamma$ и $|[\vec{a}, \vec{b}]|=|\vec{a}| \cdot|\vec{b}| \cdot \sin \gamma$, где γ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
14. Пусть векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ равны по модулю 1. Тогда из задачи 13 получаем, что $|([\vec{A}, \vec{B}], \vec{C})|=\sin AB \sin h_C$, где h_C - длина высоты треугольника ABC, проведенной из вершины C. Тождество $(\vec{A},[\vec{B}, \vec{C}])=(\vec{B},[\vec{C}, \vec{A}])=(\vec{C},[\vec{A}, \vec{B}])$ означает, что $\sin AB \sin h_C=\sin BC \sin h_A=\sin CA \sin h_B$ (1). Записывая аналогичное тождество для единичных векторов, соответствующих прямым, содержащим стороны треугольника ABC, поучим равенство $\sin \angle C \sin h_C=\sin \angle A \sin h_A= \sin \angle B \sin h_B$ (2). Поделив равенство (1) на равенство (2), получим сферическую *теорему синусов*:

$$\frac{\sin AB}{\sin \angle C}=\frac{\sin BC}{\sin \angle A}=\frac{\sin CA}{\sin \angle B}.$$

Замечание. Смешанное произведение трех векторов имеет прозрачный геометрический смысл — объем параллелепипеда, построенного на этих трех векторах, со знаком. Нам не известно столь же естественной интерпретации этого числа в терминах сферической геометрии.
15. *Первое решение.* То, что *стороны* сферического треугольника однозначно определяют его углы, доказывается так же, как в геометрии Евклида. Теперь остается рассмотреть треугольник, 'двойственный' данному (то есть такой треугольник, что идущие в его вершины векторы перпендикулярны плоскостям, содержащим стороны исходного треугольника.)
Второе решение. Аналогично решению задачи 6 можно доказать тождество $([\vec{a}, \vec{c}],[\vec{b}, \vec{c}])=(\vec{a}, \vec{b})(\vec{c}, \vec{c})-(\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{c})$. Применяя результаты задачи 13, получаем отсюда формулу (*теорема косинуса для сферического треугольника*)

$$\sin \angle A \sin \angle B \cos AB=\cos \angle C-\cos \angle A \cos \angle B.$$

Отсюда уже непосредственно следует, что углы сферического треугольника однозначно определяют его стороны.
Замечание.* Полученные выше теоремы сферической геометрии сохраняют силу также для геометрии Лобачевского, поскольку она переходит в сферическую при умножении всех координат на мнимую единицу i. При этом слова 'прямые пересекаются в одной точке' нужно заменить на 'прямые принадлежат одному пучку', а '$\cos AB$' во всех формулах — на '$\operatorname{ch} AB$'. Если представить плоскость Лобачевского как единичную сферу в псевдоевклидовом пространстве, то формально проходят предыдущие рассуждения с векторным произведением $[\vec{A}, \vec{B}]:=*(\vec{A} \wedge \vec{B})$ [1].

19. Нетрудно убедиться, что направления обоих векторов u и v не зависят от выбора точек A и B: вектор u параллелен нашей прямой, а вектор v перпендикулярен плоскости, проходящей через нашу прямую и точку O. При этом модуль вектора u равен AB, а модуль вектора v равен удвоенной площади треугольника ABO, то есть $AB \cdot h$, где h — расстояние от точки O до нашей прямой. Поэтому при изменении точек A и B векторы u и v умножаются на одно и то же число.

20. Действительно, наша прямая обязана лежать в плоскости, проходящей через O и перпендикулярной вектору v. Наша прямая также должна быть параллельна вектору v, а расстояние от нее до точки O должно равняться $|v|/|u|$. При этом вектор $[u,v]$ указывает, в какой 'стороне' относительно точки O расположена данная прямая. Тем самым наша прямая определяется парой векторов u и v однозначно.
21. Построение требуемой прямой по векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$ фактически приведено в решении предыдущей задачи.
22. (эта одна из самых трудных задач из данного списка) Определим *скалярное произведение* бивекторов $\hat{a}=(u,v)$ и $\hat{b}=(u',v')$ формулой

$$(\hat{a},\hat{b}) = ((u,v);(u,v')+(u',v)).$$

Скалярное произведение двух бивекторов — это *пара* чисел. Нетрудно проверить, что $(\hat{a},[\hat{a},\hat{b}]) = (\hat{b},[\hat{a},\hat{b}]) = (0;0)$. Поэтому наша задача сразу следует из такой леммы:

Лемма. Если $(\hat{a},\hat{b})=(0;0)$, то прямые a и b пересекаются, и угол между ними — прямой.

Доказательство леммы. То, что прямые a и b перпендикулярны, следует сразу из того, что обращается в нуль первая компонента скалярного произведения бивекторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$: $(u,u')=0$. Остается показать, что если $(\hat{a},\hat{b})=(0;0)$, то прямые a и b пересекаются.
Рассмотрим вначале случай, когда $u\perp v$ и $u'\perp v'$.
Проверим, что скалярное произведение бивекторов не зависит от выбора точки O. Предположим, что в самом начале мы фиксировали другую точку O_1. Пусть $\hat{a}_1=(u_1,v_1)$, $\hat{b}_1=(u_1',u_1')$ — бивекторы, которые мы построили по прямым a и b, считая фиксированной точкой точку O_1. Тогда непосредственно проверяется, что $u_1=u$, $v_1=v+[u,\overrightarrow{OO_1}]$ и $u_1'=u'$, $v_1'=v'+[u',\overrightarrow{OO_1}]$. Поэтому

$$(\hat{a}_1,\hat{b}_1) = ((u,u');(u,v'+[u',\overrightarrow{OO_1}])+(v+[u,\overrightarrow{OO_1}],u')) = ((u,u');(u,v')+(v,u')) = (\hat{a},\hat{b}),$$

так как $(u,[u',\overrightarrow{OO_1}])+([u,\overrightarrow{OO_1}],u')=0$. Итак, действительно, скалярное произведение бивекторов не зависит от выбора точки O.
Поэтому можно без ограничения общности считать, что точка O лежит на прямой a. Тогда $v=0$. Поэтому условие $(\hat{a},\hat{b})=(0;0)$ означает, что вектор u перпендикулярен вектору v'. Если $v'=0$, то все доказано, так как тогда O — общая точка прямых a и b. Если $v'\neq 0$, то тогда обе прямые лежат в плоскости, проходящей через точку O перпендикулярно вектору v', а следовательно — пересекаются. Тем самым случай $u\perp v$ и $u'\perp v'$ полностью разобран.
Рассмотрим теперь случай, когда не обязательно $u\perp v$ и $u'\perp v'$. (Этот случай особенно важен для дальнейшего, поскольку даже если бивекторы $\hat{a}$ и $\hat{b}$ обладали указанным свойством, для бивектора $[\hat{a},\hat{b}]$ оно может не выполняться.) В этом случае, по определению, бивектор $\hat{a}=(u,v)$ соответствует той же прямой, что и бивектор $(u, pr\, v)$. Обозначим последний бивектор через $\hat{a}_\perp$. Заметим, что $pr\, v = v+\alpha u$ для некоторого числа α. Аналогично определим бивектор $b_\perp$ и число β. Тогда, если $(\hat{a},\hat{b})=(0;0)$, то $(\hat{a}_\perp,\hat{b}_\perp)=((u,u');(u,v')+\beta(u,u')+(v,u')+\alpha(u,u'))=(\hat{a},\hat{b})=(0;0)$, поскольку $(u,u')=0$. Тем самым второй случай в нашей лемме сводится к первому, и лемма доказана.
Замечание.* Определение произведения бивекторов происходит из формулы для коммутатора в алгебре Ли группы движений трехмерного пространства. Одной из геометрических интерпретаций наших бивекторов являются *скользящие векторы* [3].
23. Заметим, что $(\hat{a}+\hat{b},[\hat{a},\hat{b}])=(\hat{a},[\hat{a},\hat{b}])+(\hat{b},[\hat{a},\hat{b}])=0$. Поэтому по лемме из решения задачи 22 прямая, соответствующая вектору $\hat{a}+\hat{b}$, пересекает прямую, соответствующую вектору $[\hat{a},\hat{b}]$. А по задаче 22 последняя прямая — это общий перпендикуляр к прямым a и b.
24. Тождество Якоби для произведения бивекторов получается непосредственно из тождества Якоби для произведения векторов.
25. Применяя несколько раз задачу 22, получаем, что бивекторы $[\hat{a},[\hat{b},\hat{c}]]$, $[\hat{b},[\hat{c},\hat{a}]]$ и $[\hat{c},[\hat{b},\hat{a}]]$ соответствуют прямым a'', b'' и c'' (в таком порядке). Из тождества Якоби следует, что $[\hat{c},[\hat{b},\hat{a}]]=[\hat{a},[\hat{b},\hat{c}]]+[\hat{b},[\hat{c},\hat{a}]]$. Тогда по задаче 23 прямая c'' пересекает общий перпендикуляр к прямым a'' и b'', который мы обозначим через h. По задаче 9 угол между c'' и h — прямой. Поэтому h — общий перпендикуляр к a'', b'' и c'', и Теорема о высотах 'трехсторонника' доказана.

27. В решении данной задачи мы будем опираться на некоторые факты, доказанные в последующих задачах.
Требуемое утверждение достаточно доказать для окружностей на сфере (так как плоскость можно отобразить на сферу с помощью стереографической проекции). Будем обозначать вектор, соответствующий данной окружности, той же буквой, что и саму окружность, со значком вектора. Тогда по задаче 34 $\vec{c}' = \frac{d_B}{d_B-d_A}\vec{a} - \frac{d_A}{d_B-d_A}\vec{b}$, аналогичные формулы можно написать для $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$. Тогда

$$\frac{d_C-d_B}{d_Cd_B}\vec{a}' + \frac{d_A-d_C}{d_Ad_C}\vec{b}' + \frac{d_B-d_A}{d_Bd_A}\vec{c}' = 0.$$

Применяя лемму из решения задачи 34, получаем, что три окружности a, b и c проходят через одну точку.
Замечание.* В зависимости от того, образуют ли окружности 'выпуклый' или 'вогнутый' треугольник, эта теорема означает теорему о биссектрисах в сферической геометрии или геометрии Лобачевского соответственно.
28*. (Решение А. Мафусалова) Приведем план решения данной задачи, опуская технические детали. Решение основано на следующей элегантной теореме:

Теорема о высотах криволинейного треугольника. Пусть A, B и C — тройка попарно пересекающихся окружностей на плоскости. Через две точки пересечения окружностей A и B проведем окружность C', перпендикулярную окружности C. Аналогично определим окружности A' и B'. Тогда три окружности A', B' и C' принадлежат одному пучку. (В частности, если две из них пересекаются, то все три окружности проходят через одну точку.)

Можно проверить, что утверждение задачи 28 — это в точности теорема о высотах для криволинейного треугольника $a'b'c'$.

Доказательство теоремы. Пусть D — радикальный центр трех окружностей A, B и C. Обозначим через d степень точки D относительно данных окружностей. Рассмотрим сферу радиуса $\sqrt{|d|}/2$, касающуюся плоскости в точке D. Произведем стереографическую проекцию плоскости на данную сферу. Возможны три случая:
Случай $d < 0$. Тогда можно проверить, что окружности A, B и C перейдут в три большие окружности на нашей сфере. В этом случае наша теорема следует из теоремы о высотах сферического треугольника (задача 8).
Случай $d = 0$. Сделаем инверсию относительно точки D. Тогда наша теорема перейдет в теорему о высотах евклидова треугольника.
Случай $d > 0$. В этом случае можно проверить, что окружности A, B и C перейдут в три окружности на сфере с центрами на одной сферической прямой. Обозначим эту сферическую прямую через p. Рассмотрим сечение сферы плоскостью, содержащей p. Сделаем ортогональную проекцию нашей сферы на эту плоскость. Тогда три построенных окружности на сфере перейдут в три хорды окружности p. Обозначим эти хорды через KL, MN и PQ. Окружность C' при композиции нашей стереографической проекции и ортогональной проекции переходит в некоторую хорду $P'Q'$. Можно проверить, что прямая XY должна проходить через точку пересечения прямых KL и MN, а также точку пересечения касательных к окружности p в точках P и Q. Аналогично строятся хорды $K'L'$ и $M'N'$. Нам нужно показать, что прямые $K'L'$, $M'N'$ и $P'Q'$ пересекаются в одной точке. Это утверждение можно доказать, например, применяя теорему Чевы в тригопометрической форме. (На самом деле полученное утверждение есть теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского, сформулированная в модели Клейна.)
29. Пусть A_1, B_1 и C_1 — *'центры'* окружностей, соответствующих векторам $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ (то есть такие точки на сфере, что касательная плоскость в каждой точке параллельна плоскости соответствующей окружности). Тогда векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ $\overrightarrow{OC_1}$ параллельны векторам $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$. Рассуждая аналогично решению задачи 4, получаем, что точки A_1, B_1, C_1 и O лежат в одной плоскости, то есть, что 'центры' окружностей A, B и C лежат на одной сферической прямой.
30. Пусть A_1 — такая точка, что $\overrightarrow{OA_1} = \vec{A}$. Обозначим через d_A длину касательной, проведенной из точки A_1 к нашей сфере. Возьмем произвольную точку C на окружности A. По теореме Пифагора для треугольника OA_1C получаем $OA_1^2 = OC^2 + A_1C^2$, то есть $(\vec{A}, \vec{A}) = 1 + d_A^2$, что и требовалось.
31. Решение данной задачи получается из следующей более общей формулы для угла γ между окружностями A и B:

$$\cos\gamma = \frac{(A,B)-1}{d_A d_B}.$$

Докажем эту формулу. Пусть C — одна из точек пересечения окружностей A и B. Обозначим $\vec{C} = \overrightarrow{OC}$. Заметим, что векторы $[\vec{A}, \vec{C}]$ и $[\vec{B}, \vec{C}]$ параллельны касательным к окружностям A и B соответственно, проведенным в точке C. Поэтому

$$\cos\gamma = \frac{([\vec{A},\vec{C}],[\vec{B},\vec{C}])}{|[\vec{A},\vec{C}]|\cdot|[\vec{B},\vec{C}]|}.$$

Приведем правую часть данного равенства к нужному виду. Легко убедиться, что $|[\vec{A},\vec{C}]| = |\vec{A}|\cdot|\vec{C}|\cdot\sin\angle(\vec{A},\vec{C}) = d_A$. Поэтому знаменатель данного выражения имеет вид $d_A d_B$. Теперь преобразуем числитель, пользуясь тождеством из второго решения задачи 15:

$$([\vec{A},\vec{C}],[\vec{B},\vec{C}]) = (\vec{A},\vec{B})(\vec{C},\vec{C}) - (\vec{A},\vec{C})(\vec{B},\vec{C}) = (\vec{A},\vec{B}) - 1.$$

Подставляя в наше равенство выражения для числителя и знаменателя, получим требуемую формулу.
32. Предположим, что вектор $\vec{P} = \frac{[\vec{A},\vec{B}]+[\vec{B},\vec{C}]+[\vec{C},\vec{A}]}{(\vec{A},\vec{B},\vec{C})}$ соответствует некоторой окружности P (такой окружности может и не существовать, в этом случае данный вектор не имеет геометрической интерпретации). Заметим, что

$$(\vec{P},\vec{A}) = \frac{0 + (\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]) + 0}{(\vec{A},\vec{B},\vec{C})} = 1.$$

Значит, по задаче 31, окружность P перпендикулярна окружности A. Аналогично, окружность P перпендикулярна окружностям B и C. Иными словами, P — *общий перпендикуляр* к трем окружностям A, B и C.
Замечание.* Окружности на сфере более естественно ставить в соответствие не вектор, а пару $(\vec{A}, h)$, где $\vec{A}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости окружности, а h — расстояние от этой плоскости до точки O. Иными словами, каждой окружности ставится в соответствие некоторый кватернион. Будем обозначать его той же буквой, что и саму окружность. Будем считать, что все кватернионы, получающиеся из данного умножением на действительное число, соответствуют одной и той же окружности. Тогда, например, кватернион $AB - BA$ соответствует прямой, проходящей через центры окружностей A и B, а кватернион $ABC - ACB + BCA - BAC + CAB - CBA$ соответствует окружности, перпендикулярной трем окружностям A, B и C. А вот коммутатор четверки кватернионов $ABCD - ABDC + ...$ всегда равен нулю, и это тождество позволяет получить, например, такую геометрическую теорему:

Утверждение. Пусть D — центр описанной окружности треугольника ABC, а A', B' и C' — центры описанных окружностей треугольников BCD, CAD и ABD соответственно. Тогда прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

33. Пусть $\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}-\vec{D}=0$. Рассмотрим вектор $\vec{P}=\frac{[\vec{A},\vec{B}]+[\vec{B},\vec{C}]+[\vec{C},\vec{A}]}{(\vec{A},\vec{B},\vec{C})}$. Предположим, что он соответствует некоторой окружности P. Тогда по задаче 32 P — общий перпендикуляр к A, B и C. Заметим, что

$$(\vec{P},\vec{D})=(\vec{P},\vec{A}-\vec{B}+\vec{C})=1-1+1=1,$$

то есть по задаче 31 окружность P перпендикулярна окружности D. Иными словами, четыре окружности A, B, C и D имеют общий перпендикуляр.

34. Докажем вначале одно вспомогательное утверждение:

Лемма. Если найдутся ненулевые числа x, y и z, такие что $x+y+z=0$ и $x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}=0$, то окружности A, B и C проходят через одну точку.

Доказательство. Условие данной леммы означает, что концы векторов $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ лежат на одной прямой. Проведем плоскость π через эту прямую и точку O. Пусть ω — окружность, получающаяся в сечении сферы плоскостью π. Пусть H — полюс нашей прямой в плоскости π относительно окружности γ. Проведем через точку H прямую h, перпендикулярную плоскости π. Тогда можно проверить, что все три окружности A, B и C проходят через точку пересечения сферы и прямой h.

Перейдем к решению нашей задачи. Рассмотрим окружность C, соответствующую вектору $\vec{C}=\frac{d_B}{d_B-d_A}\vec{A}-\frac{d_A}{d_B-d_A}\vec{B}$. Тогда по нашей лемме окружность C проходит через обе точки пересечения окружностей A и B. Обозначим углы между парами окружностей B и C, C и A, A и B через α, β и γ соответственно. Тогда по формуле из решения задачи 31 имеем

$$\cos\beta=\frac{(\vec{A},\vec{C})-1}{d_Ad_C}=\frac{\frac{d_B}{d_B-d_A}(\vec{A},\vec{A})-\frac{d_A}{d_B-d_A}(\vec{A},\vec{B})-1}{d_Ad_C}=\frac{d_Ad_B(1-\cos\gamma)}{d_C(d_B-d_A)}.$$

Записывая аналогичное выражение для $\cos\alpha$, получаем, что $\cos\alpha=\cos\beta$. Иными словами, C — окружность, проходящая через обе точки пересечения окружностей A и B и делящая угол между этими окружностями пополам (’*биссектриса*’).

Благодарности. Авторы благодарны В. Арнольду за важные замечания, В. Дремову, которому принадлежит множество ценных идей, реализованных в данном цикле задач, а также О. Карпенкову, И. Лосеву и членам жюри XVIII Летней конференции Турнира городов за полезные обсуждения.

[1] В.И. Арнольд, Теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского как тождество Якоби в алгебре Ли квадратичных форм на симплектической плоскости, Математическое Просвещение, Третья Серия 9(2005), стр. 93–99.
[2] О.Я. Виро, Ю.В. Добротухина, Сплетения скрещивающихся прямых, Квант 3(1988), стр. 12–19.
[3] Ю.П. Соловьев, А.Б. Сосинский, Геометрия скользящих векторов, Квант 8(1985), стр. 9–17.
[4] J. Conant, R. Schneiderman, P. Teichner, Jacobi identities in low-dimensional topology, preprint (2006).