Часть А.

Решения.

1. Легко следует из счета в углах.

2. Легко следует из предыдущего пункта и счета в углах.

3. Легко следует из того, что угол между биссектрисой угла $\angle A$ и прямой B_1C_1 равен 90° и аналогичного факта про угол $\angle B$

4. Очевидное следствие двух предыдущих пунктов и свойств вписанного угла.

5. Обозначим середину отрезка A_1C_1 через E. Пересечем B_1E вторично со вписанной окружностью в точке X. Теперь считая степень точки E относительно описанной окружности BA_1IC_1 получаем $BE \cdot EI = EA_1 \cdot EC_1$. Теперь относительно вписанной окружности продолжаем $EA_1 \cdot EC_1 = EB_1 \cdot EX$. Значит по обратному свойству вписанности получаем, что $BXIB_1$ вписанный. Так как $IB_1 = IX$ равны как радиусы, то равны и углы, опирающиеся на эти хорды, то есть $\angle B_1BI = \angle IBX$. Обозначим через Y вторую точку пересечения BB_1 со вписанной окружности. Из доказанного следует, что $XY \parallel A_1C_1$. А значит прямые B_1X и B_1Y изогонально сопряжены в углу $A_1B_1C_1$. Заметим, что, если спроецироать двойное отношение точек A_1, C_1, E и бесконечно удаленной точки прямой A_1C_1 равное -1 из точки X на окружность мы получим, что двойное отношение (A_1, C_1, B_1, Y) равно -1. То есть четырехугольник со свойством, что касательные в двух его вершинах пересекаются на его диагонали, проведенной через две другие вершины, является гармоническим.

6. Используя предыдущий пункт можно легко доказать данный факт счетом углов.

7. Проведя касательные из точки B мы получаем точки A_1 и C_1. Строим точку E. Так как описанная окружность A_1C_1I делит медиану EB_1 в отношении $2:1$, то сделав гомотетию с центром в E и коэффициентом 3 образ описанной окружности треугольника A_1IC_1 пересечет вписанную окружность по точке B_1. Дальнейшие построения очевидны. Вторая точка пересечения, очевидно, даст второе решение, симметричное первому относительно биссектрисы угла B.

8. Из решения предыдущего пункта видно, что IE должно быть хотя бы в два раза меньше, чем радиус вписанной окружности. Из этого легко вывести, что угол $\angle A_1IC_1$ хотя бы 120°. Значит угол $\angle B$, дающий с ним в сумме 180°, не больше 60°.

Часть B.

Решения.

Пусть вторая точка пересечения AA_1 со вписанной окружностью — точка Q, а вторая точка пересечения CC_1 со вписанной окружностью — P. Теперь пусть K — бегающая точка по вписанной окружности. Обозначим точку пересечения KP с BC через P', а KQ с AB через Q'.

Эту часть можно не решать. Факты из нее не используются в дальнейшем.

1. Так как угол PGQ равен $90^\circ + \frac{\angle B}{2}$, то сумма дуг PQ и A_1B_1 равна $180^\circ + \angle B$. Так как дуга A_1C_1 равна $180^\circ - \angle B$, то на дугу PQ остается $2\angle B$. Значит, если пересечь прямую, проходящую через Q параллельно BA до второго пересечения со вписанной окружностью в точке T получим, что $\angle QTP = \angle B$. А значит и $TP \parallel BC$.

2. Будем двигать точку P' по BC с постоянной скоростью. Тогда получается, что Q' будет двигаться так, что будут сохраняться двойные отношения положений точек P' и Q'. То есть отображение из точек P' в точки Q' проективное. Теперь заметим, что по предыдущему пункту P' и Q' одновременно уходят на бесконечность. А значит, наше проективное преобразование сохраняет бесконечно удаленную точку на бесконечности, то преобразование аффинное. То есть если одну точку двигать линейно, то и другая двигается линейно (так как они двигаются с сохранением двойного отношения). Значит, ГМТ будет прямая. Понятно, что это будет прямая Гаусса для четырехугольника AC_1A_1C. Это очевидно, если рассмотреть частные случаи $K = A_1$ и $K = C_1$.

3. Так как ГМТ из предыдущей задачи — прямая Гаусса четырехугольника A_1C_1AC, то в какой-то точке должна достигаться середина третьей “диагонали”. Пусть R' — середина RB. Тогда заметим, что точки P' и Q' должна быть на сторонах AB и BC и их серединой должна быть точка R'. Но тогда точки $PBQR$ будут образовывать параллелограмм. Собственно его мы и построили.

4. Заметим, что проецировать двойное отношение четверки точек на окружности на эту же окружность можно с точки не на этой окружности. Действительно: пусть эта точка вовне окружности. Тогда можно сделать проективное преобразование, переводящее окружность в окружность, а эту точку в бесконечно удаленную точку. Тогда проецирование из этой точки очевидно будет сохранять двойные отношения, потому что будет простой симметрией окружности относительно диаметра. Если же точка была внутри, то можно проективным преобразованием перевести окружность в окружность, а эту точку в центр. Тогда проецирование через эту точку будет симметрией относительно центра, то есть тоже будет очевидно сохранять двойные отношения. Заметим, что так как касательные в точках B_1 и A_1 пересекаются на диагонали C_1P четырехугольника $B_1C_1A_1P$, то он гармонический. Спроецируем его из точки R на эту же вписанную окружность. Получим, что A_1 и C_1 поменяются местами, точка B_1 перейдет в себя, а значит P должна перейти в точку дополняющую тройку B_1, A_1, C_1 до гармонической четверки. То есть в точку Q. А значит, точки P, Q и R лежали на одной прямой.

5. Спроектируем точки R, B_1, A, C, образующие гармоническую четверку (так как треугольник Жергонна чевианный) из бесконечно удаленной точки прямой AB на BC. Пусть R перешла в P_1, A в B, C в C, а B_1 в B_1'. Теперь проецируем эту четверку из точки B_1 на прямую AB. Получаем, что B_1' перейдет в бесконечно удаленную точку этой прямой, B перейдет в себя, C в A, а значит, так как изначальная четверка была гармонической P_1 перейдет в середину. То есть $P_1 = P_2$. Воспользуемся ранее доказанным утверждением.

6. Заметим, что в положении $P' = A$ точка Q' в A_1, а в положении $P' = C_1$ точка Q' в C. Значит когда одна точка находится в середине отрезка, то и вторая тоже.

7. Проекция из точки P точек P', A_1, C и бесконечно удаленной точки прямой BC на вписанную окружность переводит их в точки K, A_1, C_1 и T. Так как двойное отношение было равно -1, то в полученном четырехугольнике диагональ TK проходит через точку пересечения касательных проведенных в двух других вершинах A_1 и C_1.

8. Дуга TC_1 равна дуге C_1Q, так как касательная в точке C_1 параллельна QT. Дуга C_1Q равна дуге A_1F', так как $C_1F' \parallel QA_1$. Значит дуги C_1T и $F'A_1$ равны, откуда легко следует симметрия относительно биссектрисы угла $\angle B$.

9. Смотрите решение пятого пункта из части А. Обратный ход в его решении и предыдущие два пункта приводят к решению этого.

10. Сделаем гомотетию с центром в K, переводящую P в P'. При этом T перейдет в B, а значит Q в Q'. Так как $Q'E$ параллельно QG как средняя линия, G перейдет в M. Так как PG проходит через середину дуги QT, PQ является биссектрисой в треугольнике PQT. Значит и QA_1 тоже биссектриса. То есть G — центр вписанной окружности треугольника QTP. А значит его образ, точка M, будет центром вписанной окружности образа треугольника, то есть треугольника $Q'BP'$.

Часть C.

Решения.

1. Пересечем прямую BC' с AC в точке R. Для доказательства того, что точка B лежит на прямой $A'C'$, достаточно показать, что двойные отношения точке A, C_0, B, C_1 и A, B_0, R, B_1 равны. По теореме Чевы $\frac{AC_0}{C_0B} = \frac{AB_0}{B_0C} \cdot \frac{CA_0}{A_0B}$, $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B}$. Воспользовавшись этими соотношениями, а также те, что двойные отношения точек C, A_0, B, A_1 и C, B_0, R, B_1 равны (проектирование из точки C'), получим
$$\frac{AC_0}{C_0B} \cdot \frac{C_1B}{AC_1} = \frac{AB_0}{B_0C} \cdot \frac{CA_0}{A_0B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AB_0}{B_0C} \cdot \frac{CB_0}{B_0R} \cdot \frac{B_1R}{B_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AB_0}{B_0R} \cdot \frac{B_1R}{AB_1}$$
.

2. Пусть прямая A_1C_1 пересекает прямую AC в точке R. Спроектируем двойное отношение $(A, C, B_1, R) = -1$ на прямую B_1C_1 из точки B'. C перейдет в точку A', A в X, R в C_1, B_1 в себя. Следовательно двойное отношение $(B_1, C_1, A', X) = -1$. То есть поляра точки A' проходит через точку X и полюс прямой B_1C_1, на которой она лежит, то есть точку A. Значит это прямая AX. Она же $B'C'$ по предыдущему пункту.

3. Докажем лемму: пусть треугольник $A_1B_1C_1$ чевианный для треугольника ABC. На его сторонах выбрали точки A', B' и C' соответственно, так, что вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A'B'C'$. Пусть A_0 — точка пересечения B_1C_1 с BC. Аналогично определим точки B_0 и C_0. Тогда прямые AA', BB', CC' и $A_0B_0C_0$ пересекаются в одной точке.

   Доказательство: рассмотрим треугольники $CA'A_0$ и $C'AC_0$. Применим для них теорему Дезарга. Получим, так как $CA' \cap C'A = B'$, $A'A_0 \cap AC_0 = C_1$, $A_0C \cap C'C_0 = A_1$, а эти точки лежат на одной прямой, то эти треугольники перспективны. Значит прямые CC', AA', A_0C_0 пересекаются в одной точке. Так как точки A_0, C_0, B_0 лежат на одной прямой (очевидное следствие из теорем Чевы и Менелая), то получаем, что все нужные нам прямые проходят через одну точку.

   Осталось заметить, что в нашем случае один из треугольников серединный. А значит соответственные прямые пересекаются на бесконечности, то есть параллельны.

4. Применим теорему Паппа для точек A, B_1, C и C_1, B', A_1, затем для точек A, B_1, C и C_B, B', A_B. (см. пункт 7)

5. Аналогично предыдущему пункту применяем теорему Паппа для точек A, B_0, C и C_0, B', A_0, а затем для точек A, B_0, C и C_A, B', A_C. (см. пункт 7)

6. По лемме из пункта 3 для треугольника Жергонна.

7. $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C \Rightarrow \angle BA_1C_1 = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{\angle A + \angle C}{2} \Rightarrow \angle(A_1B,\, A_1C_1) = \angle(A_1C,\, CI) + \angle(AI,\, AC_1) \Rightarrow \angle(AI,\, AC_1) = \angle(A_1B,\, A_1C_1) - \angle(A_1C,\, CI) = \angle(A_1C,\, A_1C_A) - \angle(CA_1,\, CC_A) = \angle(IC_A,\, CA_1) + \angle(A_1C,\, C_1C_A) = \angle(IC_A,\, C_AC_1)$. Следовательно, точки A, C_1, C_A, I лежат на одной окружности.

8. Из предыдущего пункта следует, что C_A — проекция точки A на биссектрису, проведенную из вершины B. А значит угол AB_0C_A центральный в треугольнике ACC_A и, значит, вдвое больше угла C в нем. То есть он равен углу C треугольника ABC. Значит $B_0C_A \perp BC$, что и означает, что C_A лежит на средней линии.

9. Так как C_0C_A параллельно BA_1, то треугольник $C_1C_0C_A$ равнобедренный. Значит $C_0C_1 = C_0C_A$. Аналогично $C_0C_1 = C_0C_B$.

10. Заметим, что окружность из предыдущего пункта ортогональна вписанной окружности, т.к. проходит через C_1, а ее центр лежит на касательной к вписанной окружности в этой точке. Значит, так как C_A и C_B лежат на одной прямой с центром вписанной окружности, получаем, что они инверсны друг другу относительно вписанной окружности. Аналогичное верно и для пары точек A_B и A_C. Значит $IC_A \cdot IC_B = r^2 = IA_B \cdot IA_C$, где r — радиус вписанной окружности. Отсюда легко понять, что нужные точки лежат на одной окружности, которая при инверсии перейдет сама в себя, а значит она ортогональна вписанной.

11. Очевидно из свойств поляр и радикальной оси, что все эти прямые будут общей хордой этих окружностей.

12. Применим теорему Паскаля к точкам A, B, B, D, C, C. Получим, что точка пересечения касательных в точках B и C лежит на прямой NP. Аналогично получаем, что точка пересечения касательных в точках A и D лежит на этой прямой. Теперь посмотрим на поляру точки M. Это прямая, проходящая через полюсы прямых BC и AD. Но полюсы прямых BC и AD — точки пересечения пар касательных в точках B и C, а так же в точках A и D. Но по доказанному это прямая PN. Значит поляра M — PN. Аналогично для остальных.

13. То, что O_B лежит на $A'C'$ равносильно тому, что поляра O_B относительно вписанной окружности проходит через полюс прямой $A'C'$ относительно вписанной окружности, то есть через точку B'. Так как ω_B ортогональна вписанной окружности, то поляра O_B относительно вписанной окружности то же самое, что поляра I относительно ω_B. Но заметим, что для вписанного в ω_B четырехугольника $C_BC_AA_BA_C$ I является точкой пересечения противоположных сторон, а B' — точкой пересечения диагоналей. Значит поляра I проходит через B', что и требовалось.

14. Так как окружности ω_B, ω_A и описанная окружность треугольника $C_AC_BC_1$ проходят через точки C_A и C_B, то их центры лежат на одной прямой.

15. Из решения предыдущего пункта видно, что O_BO_A перпендикулярна C_AC_B, то есть биссектрисе угла C треугольника. А значит, и биссектрисе угла C_0 треугольника $A_0B_0C_0$. Получаем, что стороны треугольника $O_AO_BO_C$ — это внешние биссектрисы углов треугольника $A_0B_0C_0$. Значит, его вершины это центры вневписанных окружностей, откуда очевидно следует требуемое.

16. Стороны этих треугольников перпендикулярны соответствующим биссектрисам исходного треугольника.

17. Спроектируем двойное отношение (A, C, B_1, R) равное -1 из точки B' на прямую O_AO_C. A перейдет в O_A, C в O_C, R в бесконечно удаленную точку прямой O_AO_C, а значит, B_1 перейдет в M_B, что и требовалось.

18. Заметим, что M_A, M_B, M_C, A_0, B_0, C_0 лежат на одной окружности: это окружность Эйлера для треугольника $O_AO_BO_C$. Но тогда центр гомотетии треугольников $A_1B_1C_1$ и $M_AM_BM_C$ будет так же центром гомотетии их описанных окружностей, то есть окружности Эйлера изначального треугольника (так как $\omega_{M_AM_BM_C} = \omega_{A_0B_0C_0}$ = окружность Эйлера исходного треугольника) и вписанной окружности исходного треугольника. То есть центром гомотетии будет как раз точка Фейербаха. Но из предыдущего пункта мы знаем, что на прямой M_AA_1 лежит и точка A'. Значит, прямая A_1A' проходит через точку Фейербаха, ч.т.д.

19. Заметим, что так как $A_0B_0C_0$ — серединный треугольник для треугольника ABC и при этом ортотреугольник для треугольника $O_AO_BO_C$ то у этих треугольников совпадают окружности Эйлера. Значит, точки M_A, M_B, M_C лежат на окружности Эйлера исходного треугольника. Но мы знаем, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $M_AM_BM_C$ гомотетичны, а значит гомотетичны и их описанные окружности. Осталось показать, что центр гомотетии лежит на одной из окружностей. Покажем, что он лежит на вписанной окружности исходного треугольника. Пересечем AA' с вписанной окружностью в точке R. Тогда, так как B' лежит на поляре A' относительно вписанной окружности и на диагонали A_1C_1 четырехугольника $A_1B_1C_1R$, то B' — точка пересечения диагоналей этого четырехугольника. Аналогично получаем нужное про CC'. Раз центр гомотетии лежит на вписанной окружности, то эти окружности гомотетичны.

20. Двойственный факт пункту 18.

21. Смотрите решение следующего пункты

22. Лемма 1. $\angle(A_0F,\, FA_1) = (\angle(CA,\, CB) + \angle(BA,\, BC))/2$.

Доказательство: Покажем, что $\angle(A_0F,\, FH) = \angle(CA,\, CB) + \angle(BA,\, BC)$, где H — основание высоты, опущенной из A на BC. Тогда нужный нам факт будет очевидно следовать из леммы Архимеда. Заметим, что $\angle(A_0F,\, FH) = \angle(A_0B_0,\, B_0H)$, так как все эти точки лежат на окружности Эйлера. Так же заметим, что ввиду того, что B_0 — середина гипотенузы прямоугольного треугольника AHC, $\angle(CA,\, CB) = \angle(CB_0,\, CH) = \angle(HC,\, HB_0)$. Значит $\angle(A_0B_0,\, B_0H) = \angle(A_0B_0,\, A_0H) + \angle(A_0H,\, HB_0) = \angle(BA,\, BC) + \angle(CA,\, CB)$, ч.т.д.

Лемма 2. Точки B_C, C_B, A_1, A_0 и F лежат на одной окружности.

Доказательство: Покажем, что $\angle(A_0C_B,\, C_BA_1) = \angle(A_0F,\, FA_1)$. Из вписанности C_BIA_1B получаем, что $\angle(C_BI,\, C_BA_1) = \angle(BI,\, BA_1) = \angle(BA,\, BC)/2$. Из того, что $C_BA_0 = A_0C$, получаем равенство $\angle(A_0C_B,\, C_BC) = \angle(CC_B,\, C_A0) = \angle(CA,\, CB)/2$. Откуда получаем, что $\angle(A_0C_B,\, C_BA_1) = \angle(A_0C_B,\, C_BC) + \angle(C_BC,\, C_BA_1) = \frac{(\angle(CA,CB)+\angle(BA,BC))}{2} = \angle(A_0F,\, FA_1)$. То есть C_B лежит на описанной окружности $\triangle A_1A_0F$. Аналогично получаем, что и B_C лежит на ней же. Утверждение доказано.

23. Мы получили, что A_1F — радикальная ось вписанной окружности и окружности описанной около треугольника $C_BB_CA_1$ окружностей. Так что нам осталось показать, что A' лежит на ней. Для этого достаточно заметить, что A' — центр гомотетии, переводящей треугольник $C_0C_1C_B$ в треугольник $B_0B_CB_1$, так как у этих треугольников соответственные стороны параллельны. А значит $\frac{A'C_1}{A'B_C} = \frac{A'C_B}{A'B_1}$, откуда следует равенство степеней относительно нужных окружностей $A'C_1 \cdot A'B_1 = A'C_B \cdot A'B_C$.