Устная командная олимпиада. 10 класс

1. Решите уравнение $19[x] - 96\{x\} = 0$ ($[x]$ — целая часть x — наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x).

2. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников.

3. Арифметическая прогрессия a_1, a_2, $\ldots$ состоящая из натуральных чисел такова, что при любом n произведение $a_n \cdot a_{n+31}$ делится на 2005. Можно ли утверждать, что все члены прогрессии делятся на 2005?

4. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AB \neq AC$. На стороне AB выбрана точка E, на продолжении AC за точку A выбрана точка D так, что $\angle BDC = \angle ECA$. Докажите, что площади треугольников DEC и ABC равны.

5. Каждую вершину трапеции отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Докажите, что, если получившиеся точки образуют четырехугольник, то он также является трапецией.

6. Докажите, что для любого $x > 0$ и натурального n выполнено неравенство
$$1 + x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

7. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что при любом натуральном n число $a^n + b^n$ является точной $n+1$-ой степенью.

8. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

9. Даны $N \geq 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего к большему. Раскраску всех стрелок в синий и красный цвета назовем однотонной, если нет двух таких точек A и B, что от A до B можно добраться и только по красным стрелкам, и только по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.

10. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник, стороны которого образуют углы 45° с линиями сетки, а вершины не лежат на линиях сетки. Может ли каждую сторону прямоугольника пересекать нечетное число линий сетки?