

Устная командная олимпиада. 11 класс

1. Найдите семь попарно различных натуральных чисел, сумма обратных величин которых равна 1.
2. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .
3. Найдите все пары чисел $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, удовлетворяющие равенству $\sin x + \sin y = \sin(xy)$.
4. Существует ли треугольная пирамида, каждое ребро основания которой видно из середины противоположащего бокового ребра под прямым углом?
5. Каждую вершину выпуклого четырехугольника площади S отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Обозначим площадь получившегося четырехугольника через S' . Докажите, что $\frac{S'}{S} < 3$.
6. Известно, что существует число S такое, что если $a + b + c + d + S$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = S$ (a, b, c, d отличны от нуля и единицы), то $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = S$. Найти S .
7. Каких точных квадратов, не превосходящих 10^{20} , больше: тех, у которых семнадцатая цифра с конца — 7, или тех, у которых семнадцатая цифра с конца — 8?
8. Даны $N \geq 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \dots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего к большему. Раскраску всех стрелок в синий и красный цвета назовем однотонной, если нет двух таких точек A и B , что от A до B можно добраться и только по красным стрелкам, и только по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.
9. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC . Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную AB в точке C' . Докажите, что отрезок CC' перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC .
10. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно выбрать 51 ящик так, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.