Устная командная олимпиада. 9 класс

1. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у A выше, чем оценка у B. Приведите пример, когда ученик A учится лучше, чем B, ученик B — лучше, чем C, а ученик C — лучше, чем A.

2. Известно, что сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N четно.

3. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторов некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное количество очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее количество игр могло быть сыграно, если за победу начислялось три очка, за ничью — одно, а за поражение — ноль.

4. Докажите, что для любых положительных a, b и c верно неравенство:
$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}.$$

5. Каждую вершину трапеции отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Докажите, что, если получившиеся точки образуют четырехугольник, то он также является трапецией.

6. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из карточек можно было сложить ровно одно 19-тизначное число, делящееся на 11?

7. Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2\times2\times2$ числа $1, 2, 3, \ldots, 24$ (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Сможет ли первый игрок ему помешать?

8. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из натуральных чисел, что произведение $a_n\cdot\ldots\cdot a_{n+9}$ делится на сумму $a_n+\ldots+a_{n+9}$ при любом натуральном n?

   (Арифметическая прогрессия — последовательность вида $a_n=a_1+(n-1)d$, где $d\neq0$. Если $d>0$, то арифметическая прогрессия называется возрастающей.)

9. В треугольнике ABC ($AB<BC$) точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA=\angle INB$.

10. В 100 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно выбрать 34 ящика так, что в них окажется не менее трети всех яблок и не менее трети всех апельсинов.