Московская командная олимпиада

Младшая лига

1. Последовательность натуральных чисел a_k такова, что $m+n \,\vdots\, a_m+a_n$ при любых натуральных m, n. Какие значения может принимать a_{2010}?

`ОТВЕТ.` $a_{2010} = 2010$.

РЕШЕНИЕ.

Из условия следует, что $1 + 1 \,\vdots\, a_1 + a_1$, значит, $a_1 = 1$. Далее,

$$2010 + 1 \,\vdots\, a_{2010} + a_1 = a_{2010} + 1.$$

Но 2011 простое, поэтому $a_{2010} + 1 = 2011$.

2. Докажите, что у любого неравнобедренного треугольника найдутся две стороны, отношение которых больше 3/5, но меньше 1.

РЕШЕНИЕ.

Пусть стороны треугольника $a < b < c$. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда $a < b \cdot \dfrac{3}{5} < c \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$. Следовательно,

$$a + b < \left(\frac{3}{5}\right)^2 c + \frac{3}{5}\,c = \frac{24}{25}c.$$

Противоречие с неравенством треугольника.

3. Найдите все четырехзначные числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры, $a \neq 0$), такие что $\overline{abcd} = 11(a + b + c + d)^2$.

`ОТВЕТ.` $\overline{abcd} \in \{2156, 3564, 5819\}$

РЕШЕНИЕ.

Пусть $\overline{abcd} = x$. Тогда $1000 \leqslant x < 10000$, значит, $91 \leqslant (a + b + c + d)^2 \leqslant 909$, значит, $10 \leqslant a+b+c+d \leqslant 30$. В то же время $x \equiv_9 a + b + c + d$, значит, $x \equiv_9 2x^2$, значит, $x \,\vdots\, 9$ или $x - 5 \,\vdots\, 9$. Следовательно, $a+b+c+d$ равно либо 14, либо 18, либо 23, либо 27. Далее проверка всех четырех вариантов.

4. Рассмотрим числа 1, 2, ..., 2010. Сколькими способами можно выбрать из них 1005 чисел так, чтобы сумма любых двух выбранных чисел не равнялась ни 2010, ни 2011?

`ОТВЕТ.` 1006 способов.

РЕШЕНИЕ.

Разобъем все числа на естественные пары: 1 и 2010, 2 и 2009, ..., 1005 и 1006. Для удобства будет обозначать парное число штрихом: 1'=2010, 2'=2009, ..., 1005'=1006, 1006'=1005, ..., 2010'=1.

Из каждой пары должно быть выбрано ровно одно число. Кроме того, если выбрано a, то не выбраны ни a', ни $a'-1$ ($a+(a'-1)=2010$).

Пусть наименьшее выбранное число $x<1005$. Тогда $x'-1$ не выбрано, значит, выбрано $(x'-1)'=x+1$. Аналогично доказываем, что выбраны $x+2$, $x+3$, ..., 1005, и это однозначно задает выбор остальных чисел.

Число x можно выбрать 1005 способами, либо его может не быть (если выбраны все числа, большие или равные 1006, и только они).

5. Дан белый клетчатый квадрат из n строк и n столбцов, $n>3$. Разрешается выбрать клетку и покрасить в черный цвет все клетки, расположенные в одном с ней столбце, а также все клетки, соседние с выбранной по стороне. Клетки разрешается красить в черный цвет несколько раз. Какое наименьшее количество таких действий необходимо, чтобы весь прямоугольник стал черным?

ОТВЕТ. n действий.

РЕШЕНИЕ.

За n действий можно закрасить все столбцы.

С другой стороны, если какой-то столбец (обозначим его X) не закрашивается, то все его клетки должны закрашиваться засчет столбцов слева или справа от X. При этом каждое закрашивание соседнего столбца прибавит не более одной новой черной клетки в X. Значит, суммарное количество ходов будет не меньше n.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E – середина стороны AD, а точка F – середина стороны BC. Отрезки DF и CE пересекаются в точке O. Лучи AO и BO делят сторону CD на три равные части. Найдите отношение AD к BC.

ОТВЕТ. Они равны.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим точки пересечения лучей AO и BO со стороной CD за A' и B'. Применяя теорему Менелая к треугольнику ADA' и секущей $C-O-E$, можно найти отношение $AO:OA'=3$. Аналогично можно найти отношение $BO:OB'=3$. Поскольку $AO:OA'=BO:OB'$, треугольники AOB и $A'OB'$ подобны с коэффициентом подобия $3:1$, откуда следует, что $AB||CD$ и $AB=CD$. Значит, $ABCD$ — параллелограмм.

7. В стране 100 городов, некоторые из них соединены дорогами (любая дорога соединяет напрямую два города и не пересекается с другими дорогами кроме как в городах). Министерство поручило 80 компаниям ремонт 2400 дорог. Каждая компания взялась за ремонт тех и только тех дорог, которые соединяют между собой интересные для этой компании города. Город интересен компании, если в этом городе есть представительство компании. В итоге все запланированные дороги были отремонтированы, а независимый наблюдатель обратил внимание, что все компании отремонтировали одинаковое количество дорог. Докажите, что найдется город, в котором хотя бы 8 представительств различных компаний.

РЕШЕНИЕ.

Если все компании отремонтировали поровну дорог, а в сумме 2400, то каждая компания отремонтировала хотя бы 30 дорог. Из этого следует, что у нее есть представительства хотя бы в 9 города (если не более 8, то дорог не более $8 \cdot 7/2 = 28$). Значит, найдется город с хотя бы $\lceil 80 \cdot 9/100 \rceil = 8$ компаниями.

8. Положительные числа x, y, z таковы, что $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2} + \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{2}$. Докажите, что $\dfrac{1}{2+x^3} + \dfrac{1}{2+y^3} + \dfrac{1}{2+z^3} < \dfrac{1}{3}$.

РЕШЕНИЕ.

Покажем, что для $t > 0$

$$\frac{1}{2+t^3} \leqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+t^2}. \qquad (\star)$$

Это неравенство равносильно $2t^3 - 3t^2 + 1 \geqslant 0$, что верно, поскольку левая часть равна $(2t+1)(t-1)^2$. При этом равенство достигается, только если $t = 1$. Применяя $(\star)$ к каждому слагаемому исходного неравенства в отдельности, получаем, что $\dfrac{1}{2+x^3} + \dfrac{1}{2+y^3} + \dfrac{1}{2+z^3} \leqslant \dfrac{1}{3}$. Осталось заметить, что не все числа x, y, z равны 1.

Московская командная олимпиада

Старшая лига

1. Найдите все четырехзначные числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры, $a \neq 0$), такие что $\overline{abcd} = 11(a+b+c+d)^2$.

`ОТВЕТ.` $\overline{abcd} \in \{2156, 3564, 5819\}$

РЕШЕНИЕ.

Пусть $\overline{abcd} = x$. Тогда $1000 \leqslant x < 10000$, значит, $91 \leqslant (a+b+c+d)^2 \leqslant 909$, значит, $10 \leqslant a+b+c+d \leqslant 30$. В то же время $x \equiv_9 a+b+c+d$, значит, $x \equiv_9 2x^2$, значит, $x \,\vdots\, 9$ или $x - 5 \,\vdots\, 9$. Следовательно, $a+b+c+d$ равно либо 14, либо 18, либо 23, либо 27. Далее проверка всех четырех вариантов.

2. При каком наибольшем k справедливо утверждение: "в любом треугольнике найдутся две стороны, отношение которых больше k, но меньше 1/k"?

`ОТВЕТ.` $k_{\max} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

РЕШЕНИЕ.

Число $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ называется золотым сечением и обозначается φ. Оно удовлетворяет "предельному случаю" неравенства треугольника: $\varphi^2 + \varphi = 1$.

Покажем, что $k = \varphi$ удовлетворяет условию. Пусть стороны треугольника $a \leqslant b \leqslant c$. Предположим, что $a/b \leqslant k$, $b/c \leqslant k$. Тогда $b \leqslant kc$, $a \leqslant k^2c$, и $a + b \leqslant (k + k^2)c = c$. Такого треугольника не существует.

Покажем, что если $k > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, то такое k не удовлетворяет условию. Построим три отрезка: $a_0 = \varphi^2$, $b_0 = \varphi$, $c_0 = 1$. Удлиним все три на $\varepsilon > 0$ (т.е. построим $a = a_0 + \varepsilon$, $b = b_0 + \varepsilon$, $c = c_0 + \varepsilon$), причем ε подберем так, чтобы $\dfrac{a}{b} < k$, $\dfrac{b}{c} < k$. Несложная проверка показывает, что это можно сделать.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E – середина стороны AD, а точка F – середина стороны BC. Отрезки DF и CE пересекаются в точке O. Лучи AO и BO делят сторону CD на три равные части. Найдите отношение AB к CD.

`ОТВЕТ.` Они равны.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим точки пересечения лучей AO и BO со стороной CD за A' и B'. Применяя теорему Менелая к треугольнику ADA' и секущей $C - O - E$, можно найти отношение $AO : OA' = 3$. Аналогично можно найти отношение $BO : OB' =$

3. Поскольку $AO : OA' = BO : OB'$, треугольники AOB и $A'OB'$ подобны с коэффициентом подобия $3:1$, откуда следует, что $AB||CD$ и $AB = CD$. Значит, $ABCD$ — параллелограмм.

4. Последовательность натуральных чисел a_k такова, что $m+n \mathrel{\vdots} a_m + a_n$ при любых натуральных m, n. Докажите, что $a_k = k$ при всех натуральных k.

РЕШЕНИЕ.

Подставляя $m = n = 1$, получаем, что $a_1 = 1$.

Пусть для $k = 1, 2, ..., n-1$ доказано, что $a_k = k$. Докажем, что $a_n = n$. Пусть $m = n-1$. Тогда

$$n + m = 2n - 1 \mathrel{\vdots} a_n + a_m = a_n + a_{n-1} = a_n + (n-1) \geqslant n\ .$$

Единственный делитель $2n-1$, больший либо равный n, — это само число $2n-1$. Значит, $a_n = n$.

5. Дан белый клетчатый прямоугольник из m строк и n столбцов, $m > 3$, $n > 3$. Разрешается выбрать клетку и покрасить в черный цвет все клетки, расположенные в одном с ней столбце, а также все клетки, соседние с выбранной. Клетки разрешается красить в черный цвет несколько раз. Какое наименьшее количество таких действий необходимо, чтобы весь прямоугольник стал черным?

ОТВЕТ. n – число столбцов.

РЕШЕНИЕ.

Докажем, что минимальное количество таких действий равно числу столбцов n. Пусть в результате некоторой последовательности действий все клетки оказались черными. Если в каждом столбце выбрано хотя бы по одной клетке, то действий было сделано не менее n. Иначе выберем самый левый столбец (назовем его Y), который закрашен засчет столбцов слева (X) и справа (Z) от себя.

Если X закрашивали хотя бы дважды, заменим одно закрашивание X на одно (любое!) закрашивание Y.

Если X закрашивали не более одного раза, то Z закрашивали хотя бы трижды (потому как в Y не менее 4 клеток). Заменим тройное закрашивание Z на закрашивание Z и двух соседних с ним столбцов.

Будем продолжать этот процесс, пока есть хотя бы один столбец, ни разу не закрашенный целиком. В результате получим новый набор действий, количество которых не больше чем в старом наборе, клетки закрашены все, но в новом наборе каждый столбец закрашивался хотя бы раз. Значит, и исходно действий было не менее n.

6. Биссектрисы внутренних углов A, B, C треугольника ABC пересекают описанную окружность соответственно в точках A', B', C'. Точка I – центр вписанной окружности ABC; окружность с диаметром $A'I$ пересекает сторону BC в точках A_1, A_2. Аналогично определяются точки B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что все точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

РЕШЕНИЕ.

Докажем, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке. Серединный перпендикуляр к A_1A_2 проходит через центр отрезка IA', следовательно, делит сторону BC на части, длины этих частей $a/2 + (b-c)/4$ и $a/2 - (b-c)/4$. Если применить критерий Карно к серединным перпендикулярам всех трех отрезков, получим требуемое.

Докажем теперь, что точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат на одной окружности. Пусть ω_b – окружность с диаметром IB', ω_c – окружность с диаметром IC', M – точка их пересечения. Углы IMB' и IMC' прямые, значит, точка M лежит на $B'C'$ и $IM \perp B'C'$. Поскольку $AA' \perp B'C'$, то $M \in AI$. Осталось посчитать степень точки A относительно ω_b и ω_c: $AB_1 \cdot AB_2 = AM \cdot AI = AC_1 \cdot AC_2$, откуда следует требуемое.

7. В алфавите некоторого языка три буквы. Некоторые неоднобуквенные слова являются запрещёнными, и любые два разных запрещённых слова различаются по длине. Докажите, что можно написать слово любой длины, не содержащее запрещённых подслов.

РЕШЕНИЕ.

Назовём слово *хорошим*, если оно не содержит запрещённых. Пусть a_n — число хороших слов длины n. Если мы продолжаем хорошее слово длины n добавлением буквы в его конец (всего мы можем получить таким способом $3a_n$ слов), мы можем получить

(i) хорошее слово длины $n+1$, или

(ii) слово длины $(n+1)$, имеющее вид XY, где X — хорошее слово, а Y — запрещённое.

число слов типа (ii) со словом Y длины k ровно a_{n+1-k}; следовательно, общее число слов вида (ii) не превосходит $a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ (где $a_0 = 1$). Значит,

$$a_{n+1} \geq 3a_n - (a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0), \quad a_0 = 1,\ a_1 = 3. \tag{‡}$$

По индукции докажем, что $a_{n+1} > 2a_n$ для всех n. При $n = 1$ утверждение тривиально. Если оно выполнено для $i \leq n$, то $a_i \leq 2^{i-n}a_n$; Таким образом, из (‡) мы получим

$$a_{n+1} > a_n \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^n}\right) > 2a_n.$$

Тогда $a_n \geq 2^n$ при всех n (более того, из неравенства (‡) можно вывести, что $a_n \geq (n+2)2^{n-1}$); значит, существуют хорошие слова длины n.

Замечание. Если существуют два запрещённых слова (вместо одного) любой длины, большей, чем 1, то утверждение задачи может не быть верным.

8. Действительные числа a, b, c таковы, что существует ровно один квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Чему равна сторона этого квадрата?

ОТВЕТ. $\sqrt[4]{72}$.

РЕШЕНИЕ.

Положим без потери общности, что центр квадрата лежит в точке $O(0,0)$. Обозначим кривую $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ через γ и вершины квадрата за A, B, C, D.

Во-первых, симметрия с центром в точке O переводит γ в кривую $\overline{\gamma}$ ($y = f(-x) = x^3 - ax^2 + bx - c$). Очевидно, $\overline{\gamma}$ также проходит через A, B, C, D, то есть имеет 4 различные точки пересечения с γ. Тогда $2ax^2 + 2c$ имеет хотя бы 4 различных решения, что влечет $a = c = 0$. И так как γ проходит через O и все координатные углы, то $b < 0$.

Далее, кривая γ', полученная поворотом γ вокруг O на 90°, удовлетворяет уравнению $-x = f(y)$ и так же содержит точки A, B, C, D и O. Точки пересечения (x, y) $\gamma \cap \gamma'$ определяются уравнением $-x = f(f(x))$, таким образом они являются корнями уравнения $p(x) = f(f(x)) + x$ 9-й степени. Однако число раз, которое одна кубика пересекает другую в каждом квадранте – четно (нарисуйте картинку!), и так как $ABCD$ имеет по одной точке в каждом квадранте и лежит на $\gamma \cap \gamma'$, точки пересечения A, B, C, D должны дублироваться. Это влечет, что

$$p(x) = x[(x-r)(x+r)(x-s)(x+s)]^2, \qquad (*)$$

где r, s – x-координаты точек A и B. С другой стороны, $p(x)$ определяется, как $(x^3 + bx)^3 + b(x^3 + bx) + x$, и таким образом, приравнивая коэффициенты с $(*)$ получаем

$$3b = -2(r^2 + s^2), \qquad 3b^2 = (r^2 + s^2)^2 + 2r^2s^2,$$
$$b(b^2 + 1) = -2r^2s^2(r^2 + s^2), \qquad b^2 + 1 = r^4s^4.$$

Прямое решение системы уравнений дает $b = -\sqrt{8}$ и $r^2 + s^2 = \sqrt{18}$.

Отрезок от O до (r, s) составляет половину диагонали квадрата и, таким образом, квадрат имеет сторону, равную $a = \sqrt{2(r^2 + s^2)} = \sqrt[4]{72}$.