Устная командная олимпиада по математике, 2020 год

Задача 1. Алиса и Боб играют в следующую игру. На плоскости нарисованы n точек общего положения. Игроки по очереди выбирают две точки и соединяют их отрезком. Проигрывает тот, после чьего хода возникает цикл нечетной длины. Первой ходит Алиса. Найти все n, при которых у нее есть выигрышная стратегия. *(П. В. Бибиков)*

Ответ: $n = 4k + 2$.

Решение. Будем считать точки вершинами графа, а отрезки — рёбрами. Пока игра продолжается, у данного графа нет нечётных циклов. Это означает то, что он состоит из компонент связности, каждая из которых — двудольный граф.

В случае нечётного n выигрывает Боб. Действительно, если на момент хода Боба граф не является полным двудольным, то он может провести недостающее ребро между долями, либо соединить две компоненты связности. Если же граф является полным двудольным, то в одной из долей чётное число вершин, а, значит, общее количество рёбер — чётное число, то есть было сделано чётное число ходов, и сейчас ход Алисы.

Докажем, что в случае чётного n любой игрок (назовём его N) может свести игру к позиции, в которой одна компонента связности, и число вершин в каждой её доле равно $n/2$. Всё, что для этого нужно игроку N, это сделать так, чтобы после каждого хода в долях каждой компоненты связности графа (не считая изолированных точек) было поровну вершин. Он может этого добиться, поскольку единственный ход другого игрока, нарушающий это условие, это присоединение изолированной вершины x к компоненте, которое мы можем тут же исправить, проведя ребро из x в ещё одну изолированную вершину (которая есть, потому что после каждого хода игрока N оставалось чётное количество изолированных вершин). Сам игрок N, если на момент его хода условие не нарушено, может соединить две изолированные вершины. Соединение в одну двух компонент связности, у которых в долях поровну рёбер, не нарушает этого условия, как и проведение рёбер внутри компонент. Значит, после того как изолированные вершины закончатся, останутся только несколько компонент связности, у которых в долях поровну вершин. Рано или поздно эти компоненты соединятся в одну.

Таким образом при $n = 4k$ Боб может свести игру к позиции, в которой одна компонента связности, и в долях по $2k$ вершин, то есть в конце игры будет проведено чётное число рёбер, и Боб победит.

При $n = 4k + 2$ Алиса может свести игру к позиции, где в каждой доле графа $2k + 1$ вершина, итоговое число рёбер нечётно, и Алиса победит. □

Задача 2. В таблице $n \times n$ изначально все числа равны 0. С таблицей разрешается проделывать операции следующего вида: можно выбрать n чисел, никакие два из которых не стоят в одной строке или в одном столбце, а также выбрать действительное число x, после чего к каждому выбранному числу в таблице прибавить x, а из остальных чисел вычесть $\frac{x}{n-1}$. Докажите, что такими операциями можно получить все возможные таблицы, в которых сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 0. *(В. В. Новиков)*

Решение. Для начала заметим, что сумма в каждой строке и в каждом столбце при выполнении нашей операции не меняется.

Рассмотрим первые два столбца и первые две строки таблицы. Выберем набор из n клеток, удовлетворяющих условию, чтобы в него входили клетки $(1, 1)$ и $(2, 2)$, и применим к нему операцию для числа x. Далее выберем такой же набор из n клеток, но только $(1, 1)$ и $(2, 2)$ заменим на $(1, 2)$ и $(2, 1)$, и для него уже сделаем операцию для числа $-x$. Заметим, что после этих двух операций числа на всех клетках, кроме углового квадрата 2×2 останутся неизменными: к ним сначала прибавили а потом из них вычли одно и тоже число. К клеткам же $(1, 1)$ и $(2, 2)$ прибавится число $x + \frac{x}{n-1}$, а из клеток $(2, 1)$ и $(1, 2)$ оно же вычитается.

Так как $x + \frac{x}{n-1}$ может быть равным любому вещественному числу, мы можем считать, что у нас есть операция, которая меняет только клетки на пересечении двух столбцов и двух строк, прибавляя к противоположным любое число и вычитая его же из оставшихся двух клеток.

Если с помощью таких действий можно получить таблицу заполненную нулями из произвольной таблицы, где сумма чисел в любой строке и любом столбце равна нулю, то выполнение тех же операций в обратном порядке даёт решение задачи.

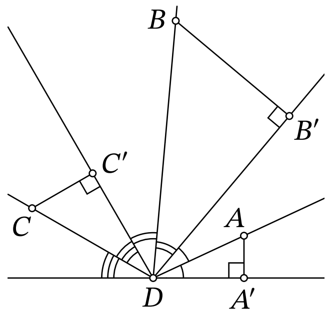
Сделаем это с помощью нашей новой операции. Занулим весь первый столбец: пока у нас есть хотя бы две ненулевые клетки, то можно сделать нулем одну из них, последняя же клетка получается нулем автоматически: сумма всех чисел в столбце должна быть равна нулю. Таким образом мы занулим все столбцы кроме последнего. А так как сумма чисел в каждой строке равна нулю, то последний столбец будет к этому моменту состоять из нулей. □

Задача 3. Все простые числа от 1 до n раскрасили в два цвета: синий и красный ($n > 3$ — натуральное число). Оказалось, что модуль разности произведений синих и красных чисел меньше n. Чему он может быть равен? *(фольклор)*

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что если разность делится на какой-нибудь простой делитель, то этот простой делитель также меньше n. А это значит, что этот просто делитель есть либо в списке красных, либо в списке синих чисел (причем ровно в одном из двух списков). Противоречие. □

Задача 4. Дано $DA' + DC' = DB'$. Докажите, что $ABCD$ вписанный. *(Л. А. Попов)*



Первое решение. Опустим из точки C перпендикуляр CC_0 на прямую DA', из точки B перпендикуляр BB_0 на прямую DC', из точки A перпендикуляр AA_0 на прямую DB' (рис. 1).

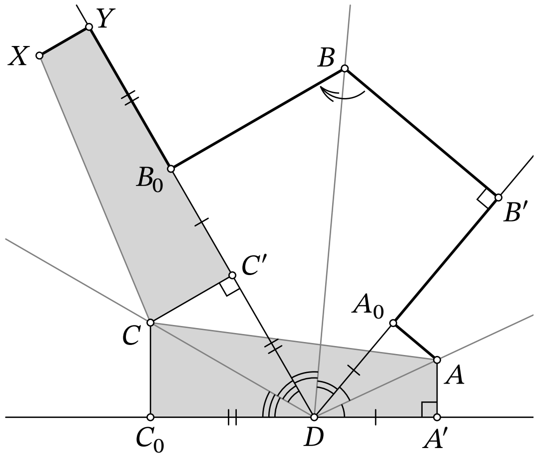


Рис. 1: к первому решению задачи 4

Повернем ломаную $BB'A_0A$ вокруг точки B на угол B_0BB' по часовой стрелке. Нетрудно понять, что точка B' перешла в точку B_0. Пусть A_0 перешла в Y, A в X.

Заметим, что

$$C'Y = C'B_0 + B_0Y = C'B_0 + B'A_0 = DA' + DC_0 = A'C_0.$$

Отсюда мы получили, что прямоугольные трапеции $XYC'C$ и $AA'C_0C$ равны, так как $XY = AA'$, $CC' = CC_0$, $C'Y = C_0A'$, $\angle XYC' = \angle YC'C = \angle CC_0A' = C_0A'A = 90°$.

Тогда треугольники XBC и CBA равны по трём сторонам (BC — общая, $BA = BX$ из-за поворота, $CA = CX$ из-за равенства прямоугольных трапеций).

Получаем

$$2\angle CBA = \angle XBA = \angle XBB_0 + \angle B_0BA = \angle ABB' + \angle B_0BA = \angle B_0BB' = 2\angle DBB'.$$

Далее, так как углы CDC', BDB_0 и ADA_0 в сумме составляют половину развернутого угла, то $\angle CDA = 90° + \angle BDB' = 180° - \angle DBB'$, что вместе с $\angle CBA = \angle DBB'$ дает искомую вписанность. □

Второе решение. Докажем сначала обратное утверждение: если точки D, A, B, C лежат на одной окружности, то выполнено равенство $DA' + DC' = DB'$.

Покажем, как равенство $DA' + DC' = DB'$ следует из равенства Птолемея для вписанного четырехугольника $DABC$:

$$DA \cdot BC + DC \cdot AB = DB \cdot AC\,.$$

Если обозначить углы $A'DA$, $B'DB$, $C'DC$ за α, β, γ соответственно, то на хорды AB, BC, AC

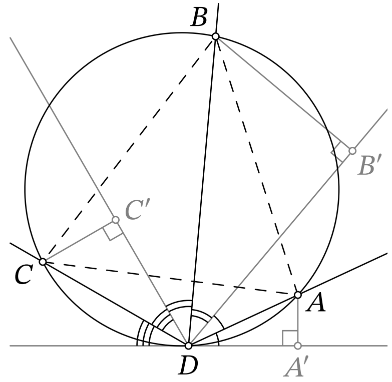


Рис. 2: ко второму решению задачи 4

опираются вписанные углы величины $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\alpha+2\beta+\gamma$ соответственно. Из теоремы синусов известно, что такие хорды равны соответственно $2R\sin(\alpha+\beta)$, $2R\sin(\beta+\gamma)$ и $2R\sin(\gamma+\alpha)$, где R — радиус окружности (последний синус мы заменили, так как $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$).

Так как $\alpha+\beta+\gamma = 90°$, то $\sin(\alpha+\beta)$ можно заменить на $\cos(\gamma)$; аналогично с остальными. Подставляя эти три хорды в равенство Птолемея и сокращая на $2R$, получаем

$$DA\cos(\alpha) + DC\cos(\gamma) = DB\cos(\beta)\,.$$

Но это и есть равенство длин проекций $DA' + DC' = DB'$.

Теперь получим прямое утверждение задачи из обратного. Действительно, если окружность, проходящая через точки D, B, C, пересекает луч DA вторично в какой-то точке A_0, то, построив аналогичную проекцию A_0', мы получаем равенства $DA' + DC' = DB'$ (дано) и $DA_0' + DC' = DB'$ (из доказанного), откуда следует, что точки A и A_0 совпадают.

Остался один нюанс: эта окружность могла бы пересечь прямую AD с другой стороны от точки D. В этом случае картинка была бы такая же, но точка C оказалась бы на «среднем» луче; мы получили бы равенство $DA'_0 + DB' = DC'$, которое противоречит данному в задаче, так как там $DB' > DC'$. □

Третье решение. Продлим перпендикуляр BB' к лучу DB' до пересечения с лучом DA в точке A_0. Перпендикуляр из B на DC' продлим до пересечения с DC в точке C_0. Пересечение BC_0 и DC' обозначим через C'_0, а из точки A_0 опустим перпендикуляр $A_0A'_0$ на луч DA' (рис. 3). Углы $\angle A'DA$, $\angle B'DB$, $\angle C'DC$ обозначим через α, β и γ соответственно. Из условия следует, что $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$.

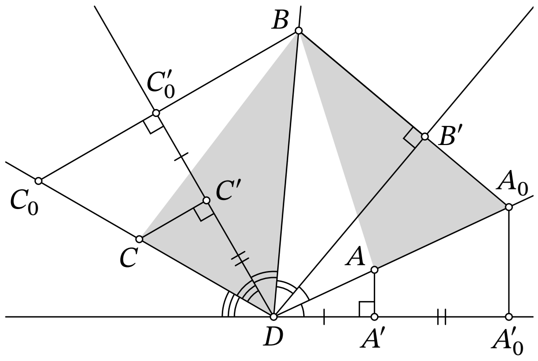


Рис. 3: к третьему решению задачи 4

В треугольнике DBA_0 угол при вершине D равен $\alpha+\beta$, угол при вершине B равен $90° - \beta = \alpha + \gamma$, и угол при вершине A_0 равен $90° - \alpha = \beta + \gamma$. Аналогично в треугольнике C_0BD углы при вершинах C_0, B и D равны $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ и $\beta + \gamma$ соответственно. Таким образом, треугольники DBA_0 и C_0BD подобны.

Заметим, что отрезки DC'_0 и DA'_0 равны DB' (первое из равенства прямоугольных треугольников DA'_0A_0 и $DB'A_0$ по гипотенузе и острому углу, второе аналогично). Отсюда ясно, что точки A' и C' соответственно разбивают их на части, равные слагаемым DA' и DC' из условия задачи. В частности, равны отношения $C'_0C' : C'D = DA' : A'A'_0$, откуда по теореме Фалеса можно получить равенство $C_0C : CD = DA : AA_0$.

Теперь понятно, что точки A и C разбивают соответственные стороны в подобных треугольниках DBA_0 и C_0BD в одинаковом отношении; значит, эти точки являются соответственными элементами, и треугольники ABA_0 и CBD также подобны. Отсюда следует, что углы BCD и BAA_0 равны. Получаем, что углы BCD и BAD дополняют друг друга до развернутого, откуда следует вписанность четырехугольника $ABCD$. □

Задача 5. Для положительных чисел $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ докажите, что максимальное значение выражения

$$\frac{a_1a_2\dots a_{n-1}a_n}{(1+a_1)(a_1+a_2)\dots(a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1})}$$

существует, и найдите его. *(Macedonia National Olympiad 2000)*

Ответ: $\dfrac{1}{3^{n+1}}$.

Решение. Заметим, что из неравенств о средних для трех чисел следует

$$1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a_1^2}{4}};$$

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a_1a_2^2}{4}};$$

$$\dots$$

$$a_{n-1} + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a_{n-1}a_n^2}{4}};$$

$$a_n + 2^n + 2^n \geqslant 3\sqrt[3]{a_n2^{2n}}.$$

Перемножим все эти неравенства

$$(1+a_1)(a_1+a_2)\dots(a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1}) \geqslant 3^{n+1}a_1a_2\dots a_{n-1}a_n.$$

Таким образом, максимальное значение выражения равно $\dfrac{1}{3^{n+1}}$, причем равенство достигается, когда $a_i = 2^i$. □

Задача 6. Множество A натуральных чисел таково, что у любых двух его различных подмножеств различные суммы. Докажите, что сумма обратных величин элементов множества A не более 2. *(Romania 1999)*

Решение.

Лемма. *Если для положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ выполняются условия:*

- $x_1y_1 < x_2y_2 < \dots < x_ny_n$;
- $x_1 + x_2 + \dots + x_k \geqslant y_1 + y_2 + \dots + y_k$ *для всех* $k = 1, 2, \dots, n$,

то верно неравенство

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_n}.$$

Доказательство. Разность между правой и левой частями требуемого неравенства можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} - \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - y_i}{x_iy_i}$$

Преобразуем эту сумму следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-y_i}{x_iy_i}=\frac{1}{x_ny_n}\big((x_1-y_1)+\ldots+(x_n-y_n)\big)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_iy_i}-\frac{1}{x_{i+1}y_{i+1}}\right)\big((x_1-y_1)+\ldots+(x_i-y_i)\big)$$

Каждый из двух сомножителей в каждом слагаемом неотрицателен, значит вся сумма неотрицательна, что и требовалось. □

Упорядочим числа $a_1<a_2<\ldots<a_n$. В множестве $\{a_1,\ldots,a_k\}$ есть 2^k-1 непустых подмножеств с различными натуральными суммами, то есть $a_1+\ldots+a_k\geqslant 2^k-1$. Если положить $y_k=2^{k-1}$ то это переписывается в виде

$$a_1+\ldots+a_k\geqslant y_1+\ldots+y_k$$

Так же очевидно выполнено $a_1y_1<a_2y_2<\ldots<a_ny_n$, поскольку обе последовательности строго возрастают. Тогда по лемме мы имеем

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\ldots+\frac{1}{y_n}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

□

Задача 7. На шахматной доске $(4n+2)\times(4n+2)$ в углу стоит черепашка ($n\geqslant 0$). За один ход она может переползти в соседнюю по стороне клетку. Черепашка проползла по всем клеткам доски, побывав на каждой ровно по одному разу, и вернулась в исходную угловую клетку. Найти наибольшее натуральное k , такое, что вне зависимости от маршрута найдется такой ряд (строка или столбец), на который черепашка заползет не меньше k раз. *(П. В. Бибиков)*

Ответ: $k=1$ при $n=0, k=2n+2$ иначе

Решение. Оценка. Строчку или столбец на шахматной доске будем называть линией. Заметим, что при каждом ходе черепашки существует ровно одна линия, на которую черепашка заползла в этот ход. В конце черепашка сделала $(4n+2)^2$ ходов, то есть заползла на линии $(4n+2)^2$ раз. Всего линий на доске ровно $8n+4$. Предположим, что в каждую линию черепашка заползала не более $2n+1$ раза. Тогда поскольку $(2n+1)(8n+4)=(4n+2)^2$ в каждую линию черепашка заползла ровно $2n+1$ раз.

Теперь рассмотрим, например, самую нижнюю строку. После того, как черепашка заползла на эту строку она обязана сделать ход внутри этой строки, потому что выползти обратно она не может. Значит каждому заползанию соответствует следующий ход внутри строки, и поскольку клеток в строке $4n+2$, после каждого хода внутри строки черепашка выползает. Это значит, что клетки в строке разбиваются на пары соседних, в которых происходят ходы внутри строки. Такое разбиение единственно. То же самое рассуждение можно применить к самому правому столбцу. Если при каждом ходе черепашки соединять начало и конец хода ребром, то, с одной стороны, по условию задачи должен получиться граф из одного цикла, а с другой стороны, при данном предположении правый нижний квадрат 2×2 будет сам по себе образовывать цикл. Эти условия возможны одновременно только если правый нижний квадрат 2×2 и есть вся доска, то есть при $n=0$. В противном случае предположение о том, что на каждую линию черепашка зашла не более $2n+1$ раза неверно, а значит на какую-то линию она зашла хотя бы $2n+2$ раза.

Пример. Опишем последовательность ходов. Сначала идут два хода вниз. Затем черепашка повторяет последовательность "вправо, вверх, вправо, вниз" $2n$ раз, таким образом проходя вторую и третью строчки целиком без последних клеток. Затем снова два хода вниз и $2n$ повторений последовательности "влево, вверх, влево, вниз", после чего черепашка оказывается в первом столбце на пятой строчке, и все клетки строчек со второй по пятую кроме последних будут пройдены. Повторяя всю уже описанную последовательность n раз черепашка пройдёт все клетки кроме нижней и верхней строчек, а так же правого столбца, и будет находиться в предпоследней клетке левого столбца. Вернёмся по свободным клеткам в начало пути.

Описанный маршрут не заходит ни на какую линию более $2n+2$ раз. Действительно, для каждой линии было ровно $4n+2$ хода, заканчивающихся в ней. Для самой верхней, самой нижней и самой правой линии $4n+1$ из этих ходов начинались в ней, для не самого правого столбца $2n$ из этих ходов начинались в этом столбце, для не самой верхней и не самой нижней строки то же самое. □

Задача 8. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^3+y^3=2020(x^2y+xy^2+1).$$

(фольклор)

Ответ: решений нет.

Решение.

$$x^3+y^3=2020(x^2y+xy^2+1);$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=2020xy(x+y)+2020;$$
$$x^2-xy+y^2=2020xy+\frac{2020}{x+y};$$
$$x^2+y^2=2021xy+\frac{2020}{x+y}.$$

Заметим, что $(x+y)$ является делителем числа 2020. Следовательно, $\max(x,y)\leqslant 2019$. Если $x,y\neq 1$, то

$$x^2+y^2\leqslant 2\big(\max(x,y)\big)^2\leqslant\min(x,y)\cdot 2019\cdot\max(x,y)<2021xy<2021xy+\frac{2020}{x+y}.$$

Теперь, без ограничения общности, будем считать, что $y=1$. В этом случае также нетрудно проверить, что

$$x^2+1<2021x+\frac{2020}{x+1}.$$

□

Задача 9. У Дирихле есть семь клеток: в одной из них сидит 1 кролик, в другой — 2, в третьей — 3, ..., в седьмой — 7. Сколько существует способов пронумеровать клетки от 1 до 7 так, чтобы ровно в одной клетке количество кроликов было больше, чем её порядковый номер? *(фольклор)*

Ответ: 120.

Решение. Пусть клетка с номером n содержит m кроликов ($n > m$), а количество кроликов во всех остальных клетках не превышает их номера. Посчитаем количество вариантов для заданных n и m.

Тогда клетка с семью кроликами может иметь только номер 7 (если $n < 7$), с шестью кроликами — номер 6, ..., с $n + 1$ кроликом — номер $(n + 1)$. Аналогично, на клетка с одним кроликом имеет номер 1 (если $m > 1$), с двумя кроликами — номер 2, ..., с $(m - 1)$ кроликом имеет номер $m - 1$.

Осталось посчитать возможные расположения номеров на клетках с количествами кроликов от m до $n-1$, ведь остальные уже расставлены однозначно. Клетка с $n-1$ кроликом может иметь номер n или $(n-1)$, так как все бóльшие номера уже заняты — это дает нам два варианта расположения. Клетка с $n - 2$ кроликами, аналогично, может иметь номер от $n - 2$ до n, кроме того, который уже занят предыдущей клеткой — это опять два варианта, и т. д. Клетка с $n - k$ кроликами, где $n - k > m$, может иметь номер от $n - k$ до n, из которых $k - 1$ позиций уже заняты клетками, рассмотренными до этого — это снова два варианта расположения.

Наконец, клетке с m кроликами останется только один номер. Всего получилось 2^{n-m-1} вариантов.

Нарисуем таблицу 7×7, и в клетку с номером строки n и столбца m впишем 2^{n-m-1}, если $n > m$. Осталось просуммировать все эти числа. В строке с номером $n > 1$ располагаются числа $2^{n-2}, 2^{n-3}, \ldots, 1$, и сумма в ней равна $2^{n-1} - 1$. Суммируя все строки, получаем

$$\begin{aligned} &2^6 - 1 + 2^5 - 1 + \ldots + 2^2 - 1 + 2^1 - 1 = \\ &\quad = (2^6 + 2^5 + \ldots + 2^1) - (1 + 1 + \ldots + 1) = 2^7 - 8\,. \end{aligned}$$ □

Задача 10. Через вершину D квадрата $ABCD$ проведена прямая ℓ, не пересекающая сторон квадрата. Луч CA пересекает ℓ в точке E. На луче ED за точкой D выбрана точка F такая, что $\angle DCF = 45°$. Оказалось, что $AE = CF$. Найдите угол CFD. *(Л. А. Попов)*

Ответ: 67,5°.

Решение. Пусть K — это точка, симметричная F относительно C (рис. 10). Треугольник KCD равен треугольнику EAD, так как $KC = CF = EA$, $CD = AD$ и $\angle KCD = \angle EAD = 135°$. Следовательно, $\angle CDK = \angle ADE$, а значит, угол KDF прямой (он равен сумме углов ADE и FDC, а они дополняются прямым углом CDA до развернутого).

Мы получили, что в прямоугольном треугольнике KDF отрезок DC — это медиана, проведенная к гипотенузе. Она равна половине гипотенузы, то есть отрезки CF и AE равны

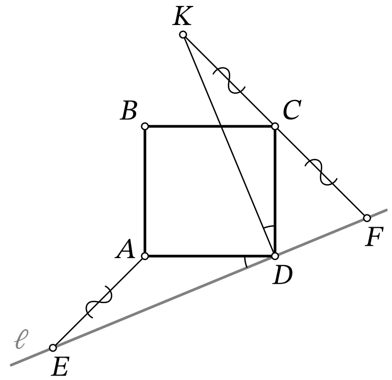


Рис. 4: к задаче 10

стороне квадрата. Это означает, что треугольник DCF — равнобедренный с углом при вершине в 45°. Значит, его углы при основании равны по $90° - \frac{1}{2} \cdot 45° = 67{,}5°$. □

Комментарий. У этой задачи есть ещё довольно много разных решений.