Устная командная олимпиада по математике, 10-11 класс, 2021 год

Задача 1. Назовем натуральное число приятным, если оно не делится на 47. Докажите, что в любом множестве из 10000 приятных чисел можно выбрать подмножество из 2021 элемента так, что любая знакопеременная сумма его пяти элементов тоже будет приятной. *Для целых чисел приятность определяется аналогично.*

Решение. Будем называть множество чисел приятным, если оно удовлетворяет условию. Заметим, что множество A нечетных чисел от -9 до 9 является приятным, поскольку в таком множестве любая искомая сумма будет нечетной и не более 45 по модулю. Рассмотрим множества

$$A_k = \{x \in X \mid \exists a \in A : kx \equiv a \pmod{47}\}.$$

Легко видеть, что при $k = 1, 2, ..., 46$ такие множества будут приятными. Если бы в каждом из этих множеств было меньше искомого количества, то суммарно их будет не более $46 \cdot 2020 = 92920$. В то же время каждый x мы посчитали в 10 множествах, а значит должно всего получиться $10 \cdot 10000 = 100000$. □

Задача 2. Найдите все многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$ такие, что если для действительных a и b значение $a + b$ — точный квадрат, то $P(a) + P(b)$ тоже.

Ответ: $P(x) = 2t^2$, $t \in \mathbb{Z}$; $P(x) = a^2x$, $a \in \mathbb{Z}$

Решение. Имеем $P(x) + P(-x) = k^2$, причем из-за непрерывности многочлена k_0^2 будет фиксированным для любого x. Аналогично $P(x+1) + P(-x) = k_1^2$. Тогда $P(x+1) - P(x) = k_1^2 - k_0^2 - -const$, а значит либо наш многочлен постоянный (в этом случае подойдут лишь вынесенные в ответ константы), либо он ведет себя как линейный, а значит искать нужно в виде $P(x) = ax + b$. Подставим в исходное: $a(x + y) + 2b$ – квадрат, если $x + y$ – квадрат. Подставляя $x + y = 0$ и $x + y = 1$, получаем, что $a = m_1^2 - m_0^2 \in \mathbb{Z}$. К тому же из подстановки следует, что $2b \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что a не может быть отрицательным, иначе можно сделать отрицательное значение для квадрата, если подставить $x + y = (2b)^2$. Ну а если положительное, то можно сделать следующее: подставим $x + y = t^2$ и домножим все на a. Имеем $(at)^2 + 2ab = ak^2$. Разницы между соседними квадратами могут быть сколь угодно большими, поэтому и разницы между соседними выражениями вида ak^2 тоже. Тогда можно подобрать t столь большим, что «довесок» $2ab$ не дотянется до квадратов, соседних с $(at)^2$, а значит $b = 0$.

□

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Точки E и F выбраны на сторонах AB и AC соответственно, причем $\angle BAC = \angle EOF$. Докажите, что периметр треугольника AEF не меньше, чем BC.

Решение.

Отразим точку A относительно OE и OF. Получим точки A' и A'', которые лежат на описанной окружности треугольника ABC. Треугольники $A'OA''$ и BOC равны по первому признаку ($OB = OC = OA' = OA''$, $\angle A'OA'' = 2\angle EOF = 2\angle BAC = \angle BOC$). Тогда $P_{\Delta AEF} = AE + EF + FA = A'E + EF + FA'' \geqslant A'A'' \geqslant BC$.

□

Задача 4. На оффлайн-собрании присутствовали $12k$ людей, причем каждый пожал руку ровно $3k+6$ другим участникам. Известно, что для любой пары людей число пожавших руку обоим одинаковое. Сколько человек могло быть на собрании?

Ответ: 36

Решение. Подсчитаем упорядоченные тройки (растопырки и треугольники). С одной стороны можно выбрать первого $12k$ способами, а добрать к нему в тройку второго и третьего – $3k + 6$ и $3k + 5$ способов соответственно. С другой стороны если обозначить за m количество пожавших руку двум людям, то первых двух можно выбрать любыми (то есть $12k$ и $12k - 1$ способами), а третьего можно добрать m способами. Имеем $12k(3k+6)(3k+5) = 12k(12k-1)m$, тогда $m = \dfrac{9k^2 + 33k + 30}{12k - 1}$. Числитель на 3 делится, а знаменатель нет, поэтому целым должно быть число $\dfrac{3k^2 + 11k + 10}{12k - 1}$. Тогда и $\dfrac{12k^2 + 44k + 40}{12k - 1} = k + 3 + \dfrac{9k + 43}{12k - 1}$ тоже. Из последнего имеем $9k + 43 \geqslant 12k - 1$ или $k \leqslant 14$. Перебором находим, что $k = 3$, откуда ответ 36. В качестве примера такой конфигурации возьмем 36 человек, каждому из которых можно присвоить упорядоченную пару остатков при делении на 6. Рукопожатия будут совершать люди у которых первый остаток пары совпал, второй остаток пары совпал или суммы остатков в паре совпадают. □

Задача 5. На окружности радиуса 13 отметили 13 точек. Верно ли, что всегда можно выбрать три из них так, что площадь соответствующего треугольника будет меньше 13?

Ответ: Верно.

Решение.

Выберем три последовательные точки так, чтобы они укладывались на $\dfrac{2}{13}$ дуги окружности. Такие найдутся, поскольку если для каждой пары точек, взятой через одну, дуга будет больше $\dfrac{2}{13}$, то обойдя дважды окружность мы получим больше, чем два оборота. Для этих трех точек основание треугольника меньше 13, поскольку центральный угол меньше $2 \cdot \dfrac{360^\circ}{13} < 60^\circ$. При этом $2\sqrt{48} > 13$, а значит высота треугольника меньше $13 - \sqrt{13^2 - (\sqrt{48})^2}$. Тогда площадь будет меньше 13.

□

Задача 6. В описанном четырехугольнике $ABCD$ точка I – центр вписанной окружности. Лучи AB и DC пересекаются в точке F, а лучи AD и BC – в точке G. Эллипс ω с фокусами в F и G проходит через точки B и D. Ветвь гиперболы γ с фокусами в F и G проходит через точки A и C. Кривые ω и γ пересекаются в точках P и Q. Докажите, что точки I, P и Q лежат на одной прямой.

Решение.

Докажем, что $GP = GQ = GY$. Имеем $PG = \dfrac{2PG}{2} = \dfrac{PF + PG - PF + PG}{2} = \dfrac{BF + BG - AF + AG}{2} = \dfrac{AG + BG + AB}{2} = \dfrac{2GY}{2} = GY$. Аналогично проверяем, что $FP = FQ = FZ$. Рассмотрим соответствующие окружности с центрами в точках F и G. Точки P и Q лежат на их радикальной оси. Касательные из точки I к рассмотренным окружностям равны, поскольку это радиусы вписанной окружности четырехугольника $ABCD$. Следовательно, точка I тоже лежит на этой радикальной оси.

□

Задача 7. Пусть r и s — натуральные числа. Положим $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. Обозначим также $f_n = a_1 a_2 \dots a_n$. Докажите, что $f_m f_n \mid f_{m+n}$ для всех натуральных m и n.

Решение.

Лемма. $a_{n+k} = a_{n+1}a_k + sa_n a_{k-1}$ при натуральных n и k.

Доказательство: Будем действовать индукцией по k при фиксированном n.

База: $k = 1, a_{n+1} = a_{n+1}a_1 + sa_n a_0$, что верно при $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$.

$k = 2, a_{n+2} = a_{n+1}a_2 + sa_n a_1$, что напрямую следует из условия рекурренты и $a_2 = r$, $a_1 = 1$.

Переход: сделаем переход от чисел k и $k+1$ к числу $k+2$. Из предположения индукции имеем: $a_{n+k} = a_{n+1}a_k + sa_n a_{k-1}, a_{n+k+1} = a_{n+1}a_{k+1} + sa_n a_k$. Домножив первое тождество на s, а второе на r, сложим их: $sa_{n+k} + ra_{n+k+1} = sa_{n+1}a_k + s^2 a_n a_{k-1} + ra_{n+1}a_{k+1} + rsa_n a_k$. Тогда левая часть из условия равна a_{n+k+2}, а правая после перегруппировки слагаемых $a_{n+1}(ra_{k+1} + sa_k) + sa_n(ra_k + sa_{k-1}) = a_{n+1}a_{k+2} + sa_n a_{k+1}$.

Заметим, что $\frac{f_{m+n}}{f_n} = a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{m+n}$. Тогда нужно доказать, что $a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \mid a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{m+n}$. Докажем это утверждение индукцией по m+n.

База:

- $m = 1$ – очевидно, $n = 1$ – очевидно.

Переход : сделаем переход к паре (n, m). Важно, что $n, m \neq 1$. Из леммы мы знаем, что $a_{n+m} = a_{n+1}a_m + sa_n a_{m-1}$. Тогда $a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{m+n} = a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{m+n-1} \cdot (a_{n+1}a_m + sa_n a_{m-1}) = a_n a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{m+n-1} s a_{m-1} + a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{m+n-1} a_{n+1} a_m$. Заметим, что оба слагаемых из последнего тождества кратны $a_1 \cdot a_2 \cdots a_m$. Первое кратно из предположения для пары $(n-1, m)$, а второе из предположения для пары $(n, m-1)$, в котором оба числа из предположения о делимости домножили на $a_m \neq 0$. Доказательство окончено.

□

Задача 8. Внутри квадратной таблицы $n \times n$ закрашены клетки некоторого квадрата $k \times k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Разрешается перекрашивать клетки выбранной строки или выбранного столбца. Какое наибольшее количество закрашенных клеток можно получить в таблице с помощью таких операций?

Ответ: $n^2 - k^2$ при $k < \dfrac{n}{2}$, $2kn - k^2$ при $k \geqslant \dfrac{n}{2}$.

Решение.

Пусть $k < \dfrac{n}{2}$. Переставим строки и столбцы таблицы так, что закрашенный квадрат окажется в углу. Занумеруем клетки этого квадрата. Тогда можно с помощью параллельных переносов вдоль сторон квадрата выделить четыре непересекающихся квадрата. Если рассмотреть орбиту клетки с фиксированным номером, то в полученном «прямоугольнике» ровно одна клетка закрашена. При этом операции не будут менять четность числа закрашенных клеток, а значит в каждом таком прямоугольнике в конце будет нечетное число закрашенных клеток. Следовательно, в конце процесса хотя бы k^2 клеток будут незакрашены. В качестве примера можно взять построчное перекрашивание всей таблицы.

Если $k \geqslant \dfrac{n}{2}$, то можно переставить строки и столбцы так, чтобы квадрат оказался в углу, затем перекрасить содержащие его столбцы, после чего с помощью перекрашивания строк можно получить закрашенный квадрат $(n-k) \times (n-k)$, к которому можно применить рассуждение из предыдущего пункта. Остается заметить, что операции обратимы, поэтому достаточно максимум найти в этой конфигурации.

□

Задача 9. Обозначим за $p(n)$ наибольший простой делитель числа $n \geqslant 2$. Верно ли, что существует бесконечно много таких n, что $p(n) < p(n+1) < p(n+2)$?

Ответ: Да, верно.

Решение. **Лемма** Для простого нечетного q и положительных $k > m$ выполнено равенство

$$\left(q^{2^k} + 1, q^{2^m} + 1\right) = 2.$$

Доказательство: Заметим (применив формулу разности квадратов $k - m$ раз), что

$$q^{2^k} - 1 \mathrel{\vdots} q^{2^m} + 1.$$

Тогда понятно, что выполнена следующая цепочка равенств:

$$\left(q^{2^k} + 1, q^{2^m} + 1\right) = \left(\left(q^{2^k} - 1\right) + 2, q^{2^m} + 1\right) = \left(2, q^{2^k} + 1\right) = 2.$$

Лемма доказана.

Теперь заметим, что, согласно лемме, найдется такое r, что у $q^{2^r} + 1$ есть делитель, больший q (иная ситуация быстро начинает противоречить тому, что попарные НОДы таких чисел равны 2). Возьмем для данного простого нечетного q минимальное такое r и докажем, что

$$p\left(q^{2^r}-1\right) < p\left(q^{2^r}\right) < p\left(q^{2^r}+1\right).$$

$p\left(q^{2^r}+1\right)$ по построению больше q, $p\left(q^{2^r}\right)$, очевидно, равно q, осталось доказать, что $p\left(q^{2^r}-1\right)$ меньше, чем q.
$q^{2^r}-1$ с помощью r раз примененной формулы разности квадратов, раскладывается в произведение скобок, все, кроме двух из которых имеют вид $q^{2^s}-1$, $s<r$ и по выбору r не могут иметь простых делителей, больших q, а две являются $q+1$ и $q-1$, у которых простых делителей, больших q не может быть по очевидным соображениям. Получается, для данного q мы нашли r, т.ч.

$$p\left(q^{2^r}-1\right) < p\left(q^{2^r}\right) < p\left(q^{2^r}+1\right).$$

Осталось заметить, что мы можем найти такое r и соответствующую тройку (которые, очевидно, не будут совпадать), для каждого из бесконечного множества нечетных простых чисел, что и доказывает ответ.

□

Задача 10. Пусть $f(x), g(x) : [0;+\infty) \longrightarrow [0;+\infty)$ — непрерывные функции. Известно, что

- $f(0)=g(0)=0$;
- $g(x)\neq 0$ при всех положительных x;
- $f(x+g(f(x)))=f(x)$ при всех неотрицательных x.

Докажите, что $f(x)=0$ при всех неотрицательных x.

Решение. Из условия $f(x+g(f(x)))=f(x)$ следует $f((x+g(f(x)))+g(f(x+g(f(x))))=f(x+g(f(x)))$. Тогда $f(x+2g(f(x)))=f(x)$, а значит можно далее показать, что $f(x+ng(f(x)))=f(x)$. Пусть утверждение задачи неверно, тогда существует максимальное $t\geqslant 0$, для которого на отрезке $[0;t]$ функция f принимает нулевое значение (в силу непрерывности). В любой окрестности t есть точки, где функция f не равна нулю. Зафиксируем $x>t$ и построим последовательность a_k, которая сходится к t и при каждом k удовлетворяет условиям $f(a_k)\neq 0$ и $a_k<x$. Тогда фиксированный x можно приблизить последовательностью $a_k+\left[\dfrac{x-a_k}{g(f(a_k))}\right]g(f(a_k))$. Но поскольку $f\left(a_k+\left[\dfrac{x-a_k}{g(f(a_k))}\right]g(f(a_k))\right)=f(a_k)\to 0$ при $k\to+\infty$, мы можем приблизить $f(x)$ к нулю, а значит значение функции в этой точке не может быть отличным от нуля.

□