Устная командная олимпиада по математике, 8-9 класс, 2021 год

Задача 1. В одной из клеток квадрата 2021×2021 находится невидимый таракан. У Лёши есть тапок, которым он раз в минуту ударяет по квадрату 50×50; каждый раз в момент удара таракан перебегает на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что Лёша сможет убить таракана.

Решение. Предположим противное. Закодируем клетки квадрата покоординатно парами чисел (A,B). Будем говорить, что Леша бьет в клетку (A,B), если он ударил по квадрату с угловыми клетками (A,B) и $(A+49,B+49)$.

Будем действовать «заметанием полос». Ударим поочередно по клеткам

$$(1,1);(50,1);(99,1)\dots(1+49k,1)\dots(1961,1);(1971,1).$$

Всего получилось 42 удара. Далее будем повторять такие серии ударов, увеличивая вторую координату на 1 при переходе к следующей серии (можно увеличивать и на большее число $\leqslant 7$).

Посмотрим на возможные позиции таракан после ударов. Так как квадрат со стороной 50, то между ударами в серии таракан не может забежать в предыдущий квадрат из следующего между ударами. Тогда легко установить, что возможные позиции таракана после серии — это «лесенка» с шириной ступеньки в 49 и высотой каждой 1 (последняя будет длины 11). С каждым ударом наша «лесенка» опускается на один уровень в глубь квадрата, а где-то поднимается на 50 позиций. За 42 хода первая опустилась на 42, но мы ее подняли на 50 в первом ходу. Тогда после серии ее высота будет 8, второй ступеньки 9 и т.д. до высоты в 50 у последней. Когда мы повторяем наше "заметание полосы", то высоты поднимаются на 1. Таким образом мы плавно увеличиваем площадь без таракана от одной стороны до другой.

В 1971 такой серии у нас лесенка не сможет увеличиваться, так как таракану неоткуда взяться в нашем квадрате. Таким образом мы справимся за 1971 такую серию.

□

Задача 2. На оффлайн-собрании присутствовали $12k$ людей, причем каждый пожал руку ровно $3k+6$ другим участникам. Известно, что для любой пары людей число пожавших руку обоим одинаковое. Сколько человек могло быть на собрании?

Ответ: 36

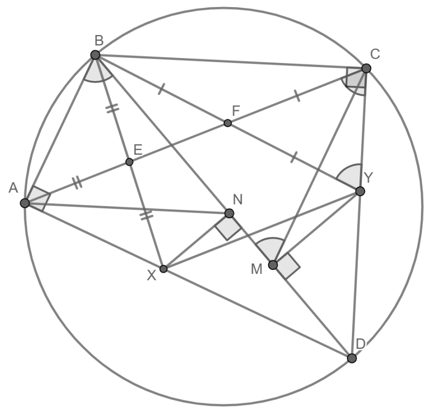
Решение. Подсчитаем упорядоченные тройки. С одной стороны можно выбрать первого $12k$ способами, а добрать к нему в тройку второго и третьего — $3k+6$ и $3k+5$ способов соответственно. С другой стороны если обозначить за m количество пожавших руку двум людям, то первых двух можно выбрать любыми (то есть $12k$ и $12k-1$ способами), а третьего можно добрать m способами. Имеем $12k(3k+6)(3k+5)=12k(12k-1)m$, тогда

$m=\dfrac{9k^2+33k+30}{12k-1}$. Числитель на 3 делится, а знаменатель нет, поэтому целым должно быть число $\dfrac{3k^2+11k+10}{12k-1}$. Тогда и $\dfrac{12k^2+44k+40}{12k-1}=k+3+\dfrac{9k+43}{12k-1}$ тоже. Из последнего имеем $9k+43\geqslant 12k-1$ или $k\leqslant 14$. Перебором находим, что $k=3$, откуда ответ 36. В качестве примера такой конфигурации возьмем 36 человек, каждому из которых можно присвоить упорядоченную пару остатков при делении на 6. Рукопожатия будут совершать люди у которых первый остаток пары совпал, второй остаток пары совпал или суммы остатков в паре совпадают.

□

Задача 3. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A=\angle C=90^\circ$. На диагонали BD выбраны точки M,N так, что $AN\parallel BC$, $CM\parallel AB$. На сторонах AD и CD соответственно выбраны точки X и Y так, что $\angle XNB=\angle YMD=90^\circ$. Докажите, что отрезок AC равен полупериметру треугольника BXY.

Первое решение.



Пусть AC пересекает BX и BY в точках E и F соответственно. Докажем, что E — середина BX, а F — середина BY.
Из этого будет следовать, что

$$AC=AE+EF+FC=BE+EF+FB=$$
$$=\frac{BX+XY+BY}{2}=\frac{P_{\Delta BXY}}{2}.$$

Доказательство того, что $BF=CF=YF$.

Воспользуемся параллельностью AB и MC, а также вписанностью $ABCD$ и $BCYM$. Получается следующая цепочка равенств

$$\angle FYC=\angle BMC=\angle ABM=\angle ACD.$$

А из неё уже следует, что CF — медиана в прямоугольном треугольнике BCY.

Аналогичным образом доказывается, что $BE=AE=XE$.

□

Второе решение. 1 Шаг. Пусть $ABCD$ вписан в окружность ω. Т.к. $\angle BMY=90^\circ=\angle BCY$, то $BCYM$ вписан. Далее из вписанности $BCYM$ и параллельности AB с CM имеем следующие тождества на уголки:$\angle ABM=\angle BMC$;$\angle CBY=\angle CMY=90^\circ-\angle BMC=90^\circ-$

$\angle ABD = \angle ADB$. Тогда BY и AN пересекаются в точке A_1 на окружности ω (дополняя точкой A_1 треугольник ABC до равнобокой трапеции). Т.к. $ABCA_1$ равнобокая трапеция, то $AC = BA_1$. Аналогично определяем C_1 и получаем, что $BC_1 = AC$. Тогда надо доказать, что $BY + BX + XY = BA_1 + BC_1$, а это равносильно $XY = XC_1 + YA_1$.

2 Шаг. Сейчас мы докажем, что D – центр вневписанной окружности треугольника BXY напротив вершины B. Т.к. $\angle DA_1B = \angle DC_1B = 90°$, то из этого моментально следует, что $XY = XC_1 + YA_1$.

1 Способ. Из вписанности $BCYM$ и параллельности AB с CM имеем следующие тождества на уголки: $\angle BAC = \angle ACM$; $\angle DBA_1 = \angle MCY = \angle BCY - \angle ACM - \angle BCA = 90° - \angle BCA - \angle BAC$. Аналогично получаем, что $\angle DBC_1 = 90° - \angle BCA - \angle BAC = \angle DBA_1$. Тогда D лежит на биссектрисе угла XBY, при этом $\angle XDY = 180° - \angle ABC = \angle BAC + \angle BCA = 90° - \angle DBA_1$. Это значит, что $\angle XDY = 90° - \dfrac{\angle XBY}{2}$. Т.к. D вне треугольника BXY, то из условия, что D на биссектрисе, и последнего тождества на углы мы как раз получаем, что это центр вневписанной окружности.

2 Способ. Из теоремы Паскаля для шестивершинника AA_1BCC_1D мы получаем, что пересечение Z прямых AA_1 и CC_1 лежит на прямой XY. Заметим, что Z – ортоцентр треугольника ACD ($AZ \parallel BC \perp CD$). Тогда точки Z и A_1 симметричны относительно CD (лемма об отражении ортоцентра). Тогда из симметрии $A_1Y = ZY$. Аналогично $C_1X = ZX$, откуда $XY = XZ + ZY = XC_1 + YA_1$. Что и требовалось. (В этом решении мы не только получили, что D - центр вневписанной, но и что Z – точка касания вневписанной.)

$\square$

Задача 4. Дан клетчатый квадрат со стороной 1000. За один ход разрешается взять любой прямоугольник (или квадрат) и разрезать его по линиям сетки на два прямоугольника, а сразу же после этого разрезать один из получившихся прямоугольников так, чтобы второй разрез был перпендикулярен первому. Какое наибольшее количество единичных квадратиков можно получить спустя несколько таких ходов? (Ход нельзя применять к прямоугольнику со стороной 1.)

Ответ: $1000^2 - 2 \cdot 999$.

Решение.

Утверждение. Если к доске $m \times n$ применить указанную операцию несколько раз, то останутся неодноклеточные прямоугольники суммарной площадью хотя бы $2(\min(m, n) - 1)$ клеток.

Доказательство.

Заметим, что ни один прямоугольник, кроме, собственно, 1×1 нельзя с помощью разрешенных действий разрезать на 1×1 без остатка. Таким образом, для всех неодноклеточных прямоугльников будет потеряно хотя бы 2 клетки.

Теперь докажем **утверждение** по индукции: *База индукции*: прямоугольники с одним из измерений равным 1. Заметим, что для 1×1 утверждение верно, а в остальных случаях для прямоугольника $1 \times a$ мы теряем даже не 0, а k площади.

Переход: пусть для всех прямоугольников, строго меньших искомого утверждение верно, докажем для искомого.

Разобьём доску на три меньших первым ходом, для каждой напишем эту оценку и просуммируем: пусть у нас доска $m \times n$ разбилась на три прямоугольника:

- $m \times k$,
- $l \times (n-k)$,
- $(m-l) \times (n-k)$.

Случай 1. Пусть $m \geqslant n$.

Тогда мы получим неодноклеточных прямоугольников суммарной площадью не меньше

$$2(\min(m,k)-1) + 2(\min(l,n-k)-1) + 2(\min(m-l,n-k)-1) =$$

$$= (2k-2) + 2(\min(l,n-k)-1) + 2(\min(m-l,n-k)-1).$$

Заметим, что если хотя бы один из оставшихся минимумов равен $n-k$, и среди этих двух прямоугольников нет 1×1, то вся сумма не меньше, чем

$$2k - 2 + 2(n-k) - 2 + 2 = 2n - 2.$$

Если же один из них это прямоугольник 1×1, то $n - k = 1$, то вся сумма не меньше, чем

$$2k - 2 + m - 1 = 2(n-1) - 2 + m - 1 \geqslant 2n - 2.$$

А если оба не равны, то сумма равняется

$$(2k-2) + (2l-2) + (2(m-l)-2) = 2k + 2m - 6.$$

Это меньше $2n - 2$ только если $m = n$ и $k = 1$ — но вот только для $k = 1$ прямоугольник $m \times k$ теряет не 0, а m клеток, что дает нам $3m - 4 \geqslant 2n - 2$ для всех $m \geqslant 2$, а значит и для всех m, рассматриваемых в переходе.

Случай 2. Пусть $m < n$.

Если $k \leqslant m$, то этот случай рассматривается аналогичным образом. Если же $k > m$, то мы получаем цепочку неравенств $n > k > m > l$. Тогда мы получим неодноклеточных прямоугольников суммарной площадью не меньше

$$2(\min(m,k)-1) + 2(\min(l,n-k)-1) + 2(\min(m-l,n-k)-1) =$$

$$= 2m - 2 + 2(\min(l,n-k)-1) + 2(\min(m-l,n-k)-1) \geqslant 2m - 2$$

Для четных m и n (в частности для $m = n = 1000$), оценка точная — для того, чтобы потерять не более, чем $2 \cdot (min(m,n) - 1)$ площади, надо каждым ходом от оставшегося «большого» (со сторонами, большими 2) прямоугольника отрезать прямоугольник $2\times n$, а от остатка — ещё один со стороной 2. Так мы порежем всё на прямоугольники со стороной 2, а из каждого того куска отрезая по два одноклеточных,можно оставить лишь одну не разрезанную доминошку. $\square$

Задача 5. Дан набор целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2000}$, по модулю не превосходящих 1000. Известно, что сумма всех чисел набора равна 1. Докажите, что в наборе $a_1, a_2, \dots\ a_{2000}$ найдется поднабор с суммой 0.

Решение. Если среди чисел есть 0, задача решена. Рассмотрим ситуацию, когда нулей нет. Очевидно, что тогда среди a_i есть числа разных знаков. Будем собирать поднабор b_k с прицелом на нулевую сумму. Для этого выберем какое-нибудь положительное a_i за b_1, а дальше будем выбирать b_n из числа невыбранных a_j так, чтобы его знак отличался от знака $s_i = \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k$. Так как сумма всех чисел исходного набора равняется 1, либо такое b_n нужного знака найдется вплоть до b_{2000}, либо сумма уже набранных b_k равна 0, либо сумма еще не выбранных a_i равна 0.

Осталось заметить, что в силу выбора b_i, эти числа не могут быть вне интервала $[-999; 1000]$, а значит, либо какое-то s_i равняется 0 и образует искомый поднабор, либо, по принципу Дирихле (у нас 2000 сумм и 1999 вариантов значения), найдутся такие $l > m$, что $s_l = s_m$. В этом случае нам, очевидно, подойдет набор $b_{m+1}, \dots, b_l$.

$\square$

Задача 6. Даны натуральные числа n и k, причем $n \geqslant k$. В группе из n человек каждый либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Антон может задать всякому человеку следующий вопрос: «Какова чётность количества рыцарей в множестве A?», где A — подмножество группы из n людей, в котором всего k человек. Ответ на этот вопрос может быть «чётно» или «нечётно». При каких k и за какое минимальное число вопросов можно узнать про каждого, кем он является?

Ответ: при чётных k можно за n вопросов.

Решение. Давайте всем людям раздадим остатки по модулю 2. Рыцари получат 1, а лжецы 0. Если спросить человека с числом p про множество A, то в качестве ответа мы получим число

$$(p+1) + \sum_{a\in A} a \pmod 2.$$

Если p лежит в множестве A, то мы узнаем сумму набора из $k-1$ числа, иначе из $k+1$ числа. Если k нечетно, то заменив всех рыцарей на лжецов, а лжецов на рыцарей, у нас не поменяются суммы по наборам. Тогда мы не сможем ничего понять ни про одного человека. Тогда k должно быть четным. Понятно, что нужно минимум n вопросов, т.к. всего вариантов распределения лжецов и рыцарей 2^n, а на каждый вопрос нам отвечают одним из двух вариантов. Спросим у всех про фиксированное множество B. Просуммировав по суммам для людей из множества B мы получим число

$$(k-1)(\sum_{b\in B} b) = \sum_{b\in B} b \pmod 2.$$

Последнее верно, т.к. $k-1$ нечетно. Тогда, принимая во внимание то, что каждый дал про B ответ

$$(p+1) + \sum_{b\in B} b \pmod 2.$$

мы узнаем все про каждого человека. $\square$

Задача 7. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$(ab+bc+ca+1)(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 2abc(a+b+c+1)^2.$$

Первое решение. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим неравенство

$$\sum_{sym} a^2b + \sum_{sym} a^3b^2 \geqslant 4\sum_{sym} a^2bc.$$

Последнее верно, если сложить 6 неравенств типа

$$a^2b + b^3c^2 \geqslant 2ab^2c.$$

$\square$

Второе решение. По неравенству КБШ

$$(a+b+c+1)^2 \leqslant (ab+bc+ca+1)(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1)$$

$$(a+b+c+1)^2 \leqslant (ab+bc+ca+1)(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+1)$$

Сложив эти два неравенства, получим

$$2(a+b+c+1)^2 \leqslant (ab+bc+ca+1)(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+2) = (ab+bc+ca+1)\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc},$$

откуда и следует требуемое неравенство. $\square$

Задача 8. Докажите, что для каждого натурального $k > 1$ найдется бесконечно много натуральных n таких, что

$$\text{НОК}(n, (n+1), \dots, (n+k)) > \text{НОК}((n+1), (n+2), \dots, (n+k+1)).$$

Решение. Докажем, что для каждого k подойдут все $n = l \cdot k! - 1$, где $l \geqslant 3$.

Пусть $m = \text{НОК}((n+1), \dots, (n+k))$. Заметим, что при таком выборе n,

$$\text{НОД}(n, n+j) = \text{НОД}(n, j) = 1$$

для всех j от 1 до k, а значит

$$\text{НОК}(n, (n+1), \dots, (n+k)) = \text{НОК}(n, m) = nm.$$

Теперь осталось заметить, что m и $n+k+1$ оба делятся на $k \geqslant 2$, а значит

$$\text{НОК}((n+1), (n+2), \dots, (n+k+1)) \leqslant \frac{m(n+k+1)}{2} < mn = \text{НОК}(n, (n+1), \dots, (n+k)).$$

□

Задача 9. На доске нарисовано несколько точек. Каждую секунду выбирают какие-то три точки, и заменяют их на середины соединяющих их отрезков. Докажите, что через некоторое время найдутся три точки, которые можно накрыть кругом радиуса 1.

Решение. Будем следить за суммой квадратов попарных расстояний.

Пусть текущая тройка точек — A, B, C, а точка D ещё одна точка из множества. Поставим D в начало координат. Сумма квадратов расстояний от D до меняющихся изменится

$$\text{с} \;\; a^2 + b^2 + c^2 \;\; \text{на} \;\; \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2.$$

Нетрудно доказать, что сумма квадратов не увеличилась. А сумма квадратов, относящаяся к попарным расстояниям меняющихся точек, уменьшается в 4 раза.

Если каждый раз тройка A, B, C не содержалась в круге радиуса 1, то сумма квадратов сторон была уж точно больше 1, значит общая сумма квадратов на каждом из сколь угодно большого числа шагов уменьшалась минимум на $\frac{3}{4}$, что невозможно. □

Задача 10. На окружности с центром в точке O отмечены точки A, B, C (именно в таком порядке). Известно, что $\angle AOB = 36°$, $\angle BOC = 72°$. Прямые MC и OB пересекаются в точке X, где M — середина отрезка AO. На отрезке OB отмечена точка Y так, что $BY = OX$. Докажите, что CY равняется радиусу окружности.

Решение. Пусть OB пересекает AC в точке Y', а r – радиус окружности. Посчитаем уголочки в равнобедренных треугольниках AOB и BOC: $\angle ABO = \angle BAO = 72°$; $\angle OCA = \angle OAC = 36°$. Далее получаем, что $\angle CAB = \angle OAB - \angle OAC = 72° - 36° = 36°$ и $\angle AY'B = \angle OY'C = 180° - \angle COY' - \angle OCY' = 72°$. Из полученных тождеств получаем, что треугольники $OCY', BAY', AY'O$ равнобедренные ($x = AB = AY' = Y'O$; $r = OC = CY'$). Т.к. $r = CY'$, то осталось показать, что $Y = Y'$ или $OX = BY'$. Далее из подобия треугольников OAY' и CAO; теоремы Менелая для треугольника $OY'A$ и прямой MC и свойства биссектрисы AY'

в треугольнике AOB мы получаем следующие отношения: $\frac{OA}{CA} = \frac{OY'}{OA}$; $\frac{AM}{OM} \cdot \frac{OX}{XY'} \cdot \frac{Y'C}{CA} = 1$; $\frac{AO}{AB} = \frac{Y'O}{Y'B}$. В терминах r и x они переписываются так: $\frac{r}{r+x} = \frac{x}{r}$; $\frac{OX}{x - OX} \cdot \frac{r}{r+x} = 1$; $\frac{r}{x} = \frac{x}{BY'}$. Выражая из последнего BY', а из второго OX, легко проверить их равенство, пользуясь первым тождеством. □