Московская командная олимпиада

25.12.2011 *11 класс*

1. Докажите, что если действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$, то $x^3 + y^3 + z^3 = xy^2 + yz^2 + zx^2$.
2. Докажите, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противоположные грани, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда три произведения длин противоположных ребер равны между собой.
3. Какое максимальное число плоскостей в пространстве можно выбрать так, чтобы нашлось 6 точек, удовлетворяющих следующим условиям: 1) на каждой из выбранных плоскостей находится не менее 4 из этих точек; 2) никакие 4 из этих точек не лежат на одной прямой?
4. Многочлен четвертой степени $P(x)$ со старшим коэффициентом 1 имеет четыре различных действительных корня, принадлежащих отрезку $[-1;1]$. Докажите, что $P(x) > -4$ для любых действительных x.
5. Игровой автомат работает на красных и синих жетонах следующим образом: либо просто проглатывает жетон (такой жетон мы назовем *проигрышным*), либо проглатывает жетон и выдает приз – шесть жетонов другого цвета. Юра начал играть с одним красным жетоном и через некоторое время остался без жетонов. Докажите, что количество проигрышных синих жетонов не равно количеству проигрышных красных жетонов.
6. В квадрате 7×7 отмечено 8 клеток, одна из которых – угловая. Докажите, что внутри квадрата можно по клеточкам выделить прямоугольник 2×3 без отмеченных клеток.
7. Существует ли такая строго возрастающая последовательность a_n, что для любого целого a в последовательности $a_n + a$ лишь конечное число простых чисел?
8. Докажите, что для любого натурального числа a найдется натуральное число b такое, что a и b взаимно просты, а число $a + b^2$ – составное.
9. Для углов α, β и γ справедливо неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 2$. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \sqrt{5}$.
10. Отрезки AA_1 и BB_1 – биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что отрезок A_1B_1 пересекает вписанную окружность треугольника ABC.