Вариант устной командной олимпиады. 11 класс. 23.12.2012.

Задача 1. Решите систему уравнений: $x^3 - y^3 = y + \frac{1}{3}$, $y^3 - z^3 = z + \frac{1}{3}$, $z^3 - x^3 = x + \frac{1}{3}$.

Задача 2. Существуют ли такие натуральные a, b, c, что $(a+b)(b+c)(c+a) = 4242$?

Задача 3. Известно, что $x_1 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$ и $\frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1$. Докажите, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1$.

Задача 4. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB_1, AC_1, AD_1 на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах *CD*, *BD*, *BC* пополам. Докажите, что плоскость $(B_1C_1D_1)$ параллельна плоскости (BCD).

Задача 5. Корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + ax + b$ положительны и различны. Известно, что среди корней многочлена $f(f(x))$ имеются два отрицательных. Докажите, что корни уравнения $f(x)$ меньше 1.

Задача 6. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$. Докажите, что все члены последовательности натуральные числа.

Задача 7. Каждое целое число окрасили в один из двух цветов: синий или красный. Известно, что числа 2012 и 2013 окрашены в разные цвета. Докажите, что сумма каких-то трех одноцветных чисел равна нулю.

Задача 8. В ряд стоят 10 школьников. Каждую минуту какие-то два соседних школьника меняются местами. Через некоторое время оказалось, что каждый из школьников успел побывать на первом и последнем местах. Докажите, что прошло не менее 65 минут.

Задача 9. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника *ABC*. Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную *AB*, в точке C'. Докажите, что отрезок CC' перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника *ABC*.

Задача 10. Среди 100 одинаково выглядящих монет ровно 4 фальшивых, которые весят одинаково и легче настоящих. За два взвешивания на чашечных весах без гирь найдите 10 заведомо настоящих монет.