

1. На доске записан трёхчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Вместо трёхчлена $p(x)$ записывают трёхчлен

$$\frac{p(x+1) + p(x-1)}{2},$$

а исходный трёхчлен стирают. Докажите, что через несколько таких замен получится трёхчлен, не имеющий корней.

2. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, P — вторая точка пересечения окружности, проходящей через точки A, O, B , с прямой BC . Докажите, что прямая AP касается окружности, проходящей через точки A, O, D .

3. Даны натуральные числа a, b, c . Докажите неравенство

$$(a, b) + (a, b + c) \leq a + c,$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a, b .

4. Знайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил (в уме) сумму этих чисел на их произведение. После этого Знайка стер самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Вторым результатом оказался в 3 раза больше первого. Какое число Знайка стер?

5. В стране 20 городов. Авиакомпания хочет организовать двусторонние рейсы между ними так, чтобы из любого города можно было добраться в любой другой не более чем за k пересадок. При этом количество авиалиний из любого города не должно превышать четырех. При каком наименьшем k это возможно?

6. Пусть P — произвольная точка внутри треугольника ABC . Выберем какую-либо вершину и отразим ее симметрично относительно P , а затем полученную точку отразим симметрично относительно середины стороны, противоположащей выбранной вершине. Обозначим полученную точку Q . Докажите, что Q не зависит от выбора вершины треугольника ABC .

7. Докажите, что для любых положительных чисел x, y, z выполнено неравенство:

$$\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(y^2 + \frac{3}{4}\right)\left(z^2 + \frac{3}{4}\right) \geq \sqrt{(x+y)(y+z)(x+z)}.$$

8. Имеется 40 одинаковых газовых баллонов, значения давления газа в которых нам неизвестны и могут быть различны. Разрешается соединять любые баллоны друг с другом в количестве, не превосходящем заданного натурального числа k , а затем разъединять их; при этом давление газа в соединяемых баллонах устанавливается равным среднему арифметическому давлений в них до соединения. При каком наименьшем k существует способ уравнивания давлений во всех 40 баллонах независимо от первоначального распределения давлений в баллонах?