УСТНАЯ ОЛИМПИАДА 10 КЛАСС

Задача 1. Палочки длиной 1 см, 2 см, 3 см, …, 200 см разложили в 50 мешков. Обязательно ли в одном из мешков найдутся три палочки, из которых можно сложить треугольник?

Задача 2. Верно ли, что в любом выпуклом многограннике есть либо треугольная грань, либо вершина, из которой выходит ровно 3 ребра?

Задача 3. Известно, что уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ при некоторых a, b, c имеет три различных действительных корня. Докажите, что если $-2\le a+b+c\le 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0;2]$.

Задача 4. Известно, что для некоторых чисел $x>0$, $y>0$, $n\in N$ справедливо равенство $x+x^2+\ldots+x^n+y+y^2+\ldots+y^n=2n$. Докажите, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2$.

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC ($AC>AB$) M – середина стороны BC, D – проекция точки пересечения высот треугольника на касательную к описанной окружности треугольника в вершине A. Докажите, что треугольник AMD равнобедренный.

Задача 6. На главной диагонали квадрата 2013×2013 стоят 5 ладей. Каждым ходом можно переставить одну из ладей в любом направлении по вертикали или горизонтали вплотную к ближайшей ладье или стенке квадрата (перепрыгивать через ладьи нельзя). Может ли в итоге одна ладья оказаться в центральной клетке квадрата, а остальные четыре - в клетках, соседних по стороне с центральной?

Задача 7. Можно ли выбрать на плоскости три точки A, B и C так, чтобы для любой точки P длина хотя бы одного из отрезков AP, BP и CP являлась бы иррациональным числом?

Задача 8. В некоторой аудитории 21 девочка и 21 мальчик решали задачи математической олимпиады. После проверки оказалось, что ни один участник из этой аудитории не решил более 6 задач, но для каждой пары, состоящей из мальчика и девочки, нашлась задача, которую решили они оба. Докажите, что некоторую задачу решило не менее трех мальчиков и не менее трех девочек.

УСТНАЯ ОЛИМПИАДА 10 КЛАСС

Задача 1. Палочки длиной 1 см, 2 см, 3 см, …, 200 см разложили в 50 мешков. Обязательно ли в одном из мешков найдутся три палочки, из которых можно сложить треугольник?

Задача 2. Верно ли, что в любом выпуклом многограннике есть либо треугольная грань, либо вершина, из которой выходит ровно 3 ребра?

Задача 3. Известно, что уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ при некоторых a, b, c имеет три различных действительных корня. Докажите, что если $-2\le a+b+c\le 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0;2]$.

Задача 4. Известно, что для некоторых чисел $x>0$, $y>0$, $n\in N$ справедливо равенство $x+x^2+\ldots+x^n+y+y^2+\ldots+y^n=2n$. Докажите, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2$.

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC ($AC>AB$) M – середина стороны BC, D – проекция точки пересечения высот треугольника на касательную к описанной окружности треугольника в вершине A. Докажите, что треугольник AMD равнобедренный.

Задача 6. На главной диагонали квадрата 2013×2013 стоят 5 ладей. Каждым ходом можно переставить одну из ладей в любом направлении по вертикали или горизонтали вплотную к ближайшей ладье или стенке квадрата (перепрыгивать через ладьи нельзя). Может ли в итоге одна ладья оказаться в центральной клетке квадрата, а остальные четыре - в клетках, соседних по стороне с центральной?

Задача 7. Можно ли выбрать на плоскости три точки A, B и C так, чтобы для любой точки P длина хотя бы одного из отрезков AP, BP и CP являлась бы иррациональным числом?

Задача 8. В некоторой аудитории 21 девочка и 21 мальчик решали задачи математической олимпиады. После проверки оказалось, что ни один участник из этой аудитории не решил более 6 задач, но для каждой пары, состоящей из мальчика и девочки, нашлась задача, которую решили они оба. Докажите, что некоторую задачу решило не менее трех мальчиков и не менее трех девочек.