Устная командная олимпиада. Вариант 11 класс. 22.12.2013.

1. У пятизначного натурального числа вычеркнули третью цифру. Полученное число оказалось делителем исходного. Найдите все такие пятизначные числа.

2. Пусть a, b, c – положительные числа такие, что $a^2+b^2+c^2 = 3$. Докажите, что $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$.

3. На доске нарисован выпуклый четырехугольник $ABCD$. Хулиган Вася, подходя к доске, меняет у него вершину B на точку, симметричную B относительно серединного перпендикуляра к AC (старую вершину стирает, новую обозначает B). Хулиган Петя, подходя к доске, меняет вершину C на точку, симметричную C относительно серединного перпендикуляра к BD. Они подходили к доске в таком порядке: Вася, Петя, Вася, Петя, Вася, Петя (ровно шесть раз). Известно, что после каждого хулиганства четырехугольник оставался выпуклым. Докажите, что в конце получился исходный четырехугольник.

4. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие условию $P(a^2) – P(a) = P(b^2) – P(b)$ для всех таких действительных чисел a и b, что $a + b = 1$.

5. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. На ребре CD рассматриваются всевозможные точки M. Докажите, что ортоцентры всех треугольников AMB лежат на одной окружности.

6. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На луче BO выбрана точка P. Описанные окружности треугольников CPB *и* APB пересекают стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что середина отрезка KL равноудалена от вершин A и C.

7. Дано 35 множеств, в каждом из которых 27 элементов. Оказалось, что любые три из этих множеств имеют ровно один общий элемент. Докажите, что все множества имеют общий элемент.

8. Все числа p, $p + 2$, $p + 2^n$, $p + 2^n + 2$ – простые. При каких натуральных n это возможно?

Устная командная олимпиада. Вариант 11 класс. 22.12.2013.

1. У пятизначного натурального числа вычеркнули третью цифру. Полученное число оказалось делителем исходного. Найдите все такие пятизначные числа.

2. Пусть a, b, c – положительные числа такие, что $a^2+b^2+c^2 = 3$. Докажите, что $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$.

3. На доске нарисован выпуклый четырехугольник $ABCD$. Хулиган Вася, подходя к доске, меняет у него вершину B на точку, симметричную B относительно серединного перпендикуляра к AC (старую вершину стирает, новую обозначает B). Хулиган Петя, подходя к доске, меняет вершину C на точку, симметричную C относительно серединного перпендикуляра к BD. Они подходили к доске в таком порядке: Вася, Петя, Вася, Петя, Вася, Петя (ровно шесть раз). Известно, что после каждого хулиганства четырехугольник оставался выпуклым. Докажите, что в конце получился исходный четырехугольник.

4. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие условию $P(a^2) – P(a) = P(b^2) – P(b)$ для всех таких действительных чисел a и b, что $a + b = 1$.

5. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. На ребре CD рассматриваются всевозможные точки M. Докажите, что ортоцентры всех треугольников AMB лежат на одной окружности.

6. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На луче BO выбрана точка P. Описанные окружности треугольников CPB *и* APB пересекают стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что середина отрезка KL равноудалена от вершин A и C.

7. Дано 35 множеств, в каждом из которых 27 элементов. Оказалось, что любые три из этих множеств имеют ровно один общий элемент. Докажите, что все множества имеют общий элемент.

8. Все числа p, $p + 2$, $p + 2^n$, $p + 2^n + 2$ – простые. При каких натуральных n это возможно?