Устная командная олимпиада 21.12.2014. 10 класс.

1. P – множество целых чисел такое, что все целые корни любого многочлена с коэффициентами из P также принадлежат P. Докажите, что если $0 \in P$ и $216 \in P$, то $-2 \in P$.

2. Какое наибольшее количество последовательных целых чисел можно представить в виде $x^3 + 2y^2$ с целыми x и y?

3. Дан выпуклый многоугольник с нечетным числом сторон. Длины всех его сторон равны 1. Докажите, что его площадь не менее $\sqrt{3}/4$.

4. На плоскости нарисованы две непересекающиеся окружности $?_1$ и $?_2$ и точки A и B на них так, что отрезок AB имеет наибольшую возможную длину. Пусть AR и AS – касательные, проведенные из точки A к окружности $?_2$; BP и BQ – касательные из точки в к окружности $?_1$. Окружность $?_1$ касается окружности $?_1$ внутренним образом и лучей AR и AS. Окружность $?_2$ касается окружности $?_2$ внутренним образом и лучей BP и BQ. Докажите, что радиусы окружностей $?_1$ и $?_2$ равны.

5. Требуется расставить ладьи на доске 8×8 так, чтобы каждое поле доски оказалось под боем не менее чем двух ладей (в том числе должны быть биты и поля, на которых стоят ладьи, причем считается, что ладья не бьет то поле, на котором она стоит). Каким минимальным числом ладей можно обойтись, если при этом считается, что ладья бьет «через» ладью, перекрывающую ей дорогу к полю?

6. В группе из 20 человек каждый имеет не более трех знакомых. Докажите, что можно выбрать 10 из них таким образом, что среди них нет троих попарно знакомых.

7. Вершины 101-угольника C имеют целые координаты. Никаких точек с целыми координатами, кроме вершин, на сторонах C нет. Докажите, что по крайней мере на одной стороне есть точка с координатами (x,y), где $2x$ и $2y$ – нечетные целые числа.

8. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$2(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1)(abc + 1).$$