Устная командная олимпиада, 9 класс. 20.12.2015

1. На доске записан квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$. Затем вместо трехчлена $P(x)$ записывают трехчлен $(P(x + 1) + P(x - 1))/2$, а исходный трехчлен стирают. Докажите, что после нескольких таких операций обязательно получится квадратный трехчлен, не имеющий корней.

2. Учитель записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашёл их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N?

3. Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток.

4. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, H – точка пересечения высот, O – центр описанной окружности, B_0 – середина стороны AC. Прямая BO пересекает сторону AC в точке P, а прямые BH и A_1C_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые HB_0 и PQ параллельны.

5. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные – не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

6. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Могут ли лучи AM и AN делить угол BAD на три равные части?

7. Решите в положительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 4 \\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} = 1 \\ x_3 + \dfrac{1}{x_4} = 4 \\ \quad\cdots \\ x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}} = 4 \\ x_{100} + \dfrac{1}{x_1} = 1 \end{cases}$$

8. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня. (Предполагается, что при любых обменах каждая семья как до, так и после обмена занимает одну квартиру, и что семьи при этом сохраняются).

Дополнительные задачи

9. Четырёхугольник $ABCD$ является одновременно и вписанным, и описанным, причём вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M, N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырёхугольника пересекаются в точке K', внешних углов B и C – в точке L', внешних углов C и D – в точке M', внешних углов D и A – в точке N'. Докажите, что прямые KK', LL', MM' и NN' проходят через одну точку.

10. Найдите все тройки натуральных чисел m, n и l такие, что $m+n=(НОД(m,n))^2$, $m+l=(НОД(m,l))^2$, $n+l=(НОД(n,l))^2$