Московская устная командная олимпиада. 18.12.2016. 10 класс.

1. Найдите все пары (x; y) целых чисел, удовлетворяющих уравнению
$x^4 + x^3y + 2x^2 + y + 1 = x^3 + x$.

2. Пусть x, y, z - положительные числа, каждое из которых меньше чем 4. Докажите, что среди чисел $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ найдется, по крайней мере, одно не меньше, чем 1.

3. На плоскости дан треугольник ABC. Найдите внутреннюю точку треугольника, произведение расстояний от которой до его сторон максимально.

4. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle A = 90°)$ на стороне AC взяли точку D. Точка E симметрична точке A относительно прямой BD, а прямая CE пересекает перпендикуляр, опущенный из точки D на CB, в точке F. Докажите, что прямые AF, DE, CB пересекаются в одной точке.

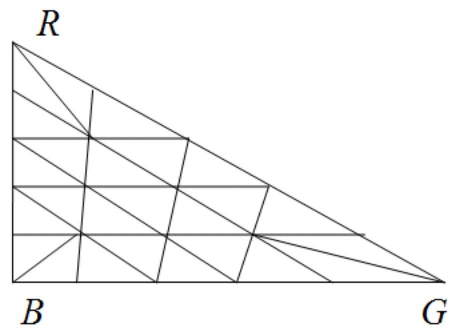
5. Набор различных гирь называют полным, если этими гирями можно отвесить на двухчашечных весах любое целое число килограммов от 1 до суммы весов всех гирь набора (гири можно класть только на левую чашу весов). Из полного набора выбросили гирю наибольшего веса. Докажите, что набор остался полным. Все гири весят целое число килограммов.

6. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$, сторона которого $BC = \sqrt{10}$. Его диагонали EC и AC пересекают диагональ BD соответственно в точках L и K. Оказалось, что вокруг четырехугольника $AKLE$ можно описать окружность. Найдите длину отрезка касательной, проведенной из точки C к этой окружности.

7. Пусть u_n – число способов разложить $1/n$ в сумму двух не обязательно различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем, $\{u_n\} = \{1,2,2,3,2,5,2,4,3,5,...\}$. Найдите явную формулу для $\{u_n\}$.

8. На выходные дни 15 рыбаков выехали на рыбалку. Оказалось, что в воскресенье каждый поймал лещей больше, чем в субботу. Наибольшее число лещей, пойманных в один день одним рыбаком, оказалось равно 20. Семеро рыбаков в сумме за два дня поймали одинаковое количество лещей.
Докажите, что какие-то два рыбака по крайней мере в один из двух выходных дней поймали одинаковое количество лещей.

9. Треугольник GRB разбит на 25 маленьких треугольников, как показано на рисунке. Все вершины этих треугольников покрашены в один из трех цветов – зеленый, красный или синий, таким образом, что выполняются условия. Вершина G – зеленая, R – красная, B – синяя. Каждая вершина на стороне GR зеленая или красная, на стороне RB – красная или синяя, на стороне GB – зеленая или синяя. Вершины внутри ΔGRB покрашены произвольным образом. Докажите, что существует, по крайней мере, один из 25 маленьких треугольников, который имеет все три вершины разных цветов.



10. Докажите, что существует многочлен $P(x)$ второй степени с целыми коэффициентами, который не имеет целых корней, но для любого натурального n существует целое x такое, что $P(x)$ кратно n.