Устная математическая олимпиада – 11 класс

18.12.16

Задача 1. На плоскости нарисовали несколько прямых и отметили все их точки пересечения. Известно, что на одной из прямых отмечена одна точка, на другой – три точки, а на третьей пять точек. Сколько всего прямых могло быть проведено?

Задача 2. Известно, что уравнение $\sin x = ax + b$ имеет m корней, а уравнение $x = a\cos x + b$ имеет n корней (a, b - положительные числа, причём $a \neq 1$). Какие значения может принимать выражение $mn - m - n$?

Задача 3. Все грани тетраэдра *ABCD* - остроугольные треугольники. В гранях *ABC* и *ABD* провели высоты *AK* и *AL* соответственно. Оказалось, что точки *C*, *K*, *L* и *D* лежат на одной окружности. Докажите, что *AB* перпендикулярно *CD*.

Задача 4. Компанию из 20 человек требуется рассадить за 4 стола. Рассадка считается удачной, если любые два человека оказавшиеся за одним столом являются друзьями. Известно, что удачные рассадки существуют, причем при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

Задача 5. Найдите все четверки действительных чисел, в каждой из которых любое число равно произведению каких-либо двух других чисел.

Задача 6. Известно, что a, b, c, d, $a > b$, $c > d$ - натуральные числа, $a + b + c + d = ab - cd$. Верно ли, что число – $a + c$ - составное?

Задача 7. В таблице 17×17 какие-то 80 клеток окрашены в черный цвет, остальные – белые. Разрешается закрасить строку или столбец в черный цвет, если большинство клеток на этой линии – черные. Можно ли с помощью таких операций сделать всю таблицу черной?

Задача 8. На плоскости заданы 100 различных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{100}$ с равными длинами. Оказалось, что все векторы $-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{100}$, $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{100}$, …, $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots - \vec{a}_{100}$ также имеют равные длины. Верно ли, что $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{100} = \vec{0}$?

Задача 9. Дан остроугольный треугольник *ABC*, в котором *P*, *M*, *N* — середины сторон *AB*, *BC*, *AC* соответственно. Из некоторой точки *H* внутри треугольника опустили перпендикуляры *HK*, *HS* и *HQ* на стороны *AB*, *BC*, *AC* соответственно. Оказалось, что *MK* = *MQ*, *NS* = *NK*, *PS* = *PQ*. Докажите, что *H* — точка пересечения высот треугольника *ABC*.

Задача 10. Найдите наименьшее значение выражения

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{24} - x_{25})^2 + (x_{25} - x_1)^2,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — произвольные попарно различные целые числа.