

Устная командная олимпиада 11-х классов. 17.12.2017.

1. У Белоснежки есть кусок бархата в виде квадрата со стороной 27,5 см, на котором находятся четыре пятна. Можно ли гарантированно вырезать из этого квадрата чистый квадратный кусок со стороной 10 см? (Пятна считаем точечными)
2. Найдите числа a_1, a_2, \dots, a_n такие, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n^2$ и $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq n^3$.
3. Каждый отрезок пространственной замкнутой ломаной $ABCD$ касается сферы. Докажите, что все точки касания лежат в одной плоскости.
4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle A = 90^\circ$) на стороне AC взяли точку D . Точка E симметрична точке A относительно прямой BD , а прямая CE пересекает перпендикуляр, опущенный из точки D на CB , в точке F . Докажите, что прямые AF, DE, CB пересекаются в одной точке.
5. Для каких натуральных n и m ($m \geq n \geq 3$) можно заполнить прямоугольную таблицу $m \times n$ числами так (в каждой клетке по одному числу), чтобы в любом квадрате 2×2 сумма чисел была отрицательной, а в любом квадрате 3×3 – положительной.
6. В пространстве даны 2018 векторов. Петя и Андрей играют в игру: они по очереди забирают себе по одному вектору, начинает Петя. Андрей выигрывает, если длина суммы его векторов больше, чем длина суммы векторов Пети, а Петя – в противном случае. Кто из них сможет выиграть, независимо от того, как будет играть соперник?
7. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие условию $f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$ для любых действительных x и y .
8. Пусть l_a, l_b, l_c – длины биссектрис $\triangle ABC$ с сторонами a, b, c , R – радиус описанной окружности. Докажите неравенство:
$$\frac{b^2 + c^2}{l_a} + \frac{c^2 + a^2}{l_b} + \frac{a^2 + b^2}{l_c} > 4R.$$
9. Множество S состоит из 2017 элементов. Выбираются подмножества S , имеющие три элемента, каждые два из которых имеют ровно один общий элемент. Каково максимальное число таких подмножеств?
10. Найдите все простые числа p такие, что число $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$ является квадратом какого-нибудь натурального числа.