Московская устная командная олимпиада по математике. 10 класс. 16.12.2018.

1. Какое наименьшее количество клеток квадрата размером 7×7 нужно закрасить, чтобы в любом его подквадрате размером 4×4 были закрашены ровно 5 клеток?

2. Положительные числа a,b,c удовлетворяют неравенству $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geq 1$. Докажите, что $a+b+c\geq ab+bc+ca$.

3. Две окружности пересекаются, A – одна из точек пересечения. В каждой из окружностей проведен диаметр, параллельный касательной в точке A к другой окружности. Докажите, что концы этих диаметров принадлежат одной окружности.

4. Для заданного натурального $n>2$ пусть C_1,C_2,C_3 — границы трех выпуклых n–угольников на плоскости, таких, что все 3 множества $C_1\cap C_2, C_2\cap C_3, C_3\cap C_1$ состоят из конечного числа точек. Какое наибольшее количество точек может иметь множество $C_1\cap C_2\cap C_3$?

5. Решите уравнение $x+\sqrt{x^2-9}=\frac{2(x+3)}{(x-3)^2}$.

6. Докажите, что уравнение $x^3+y^4=7$ не имеет решений в целых числах.

7. Андрей в некоторые клетки доски в виде квадрата со стороной n кладет монету 1 рубль, в некоторые – монету 2 рубля (в каждую клетку не более одной монеты). Может ли он так положить монеты, чтобы «стоимости» строк и столбцов принимали все значения от 1 до $2n$?

8. На столе лежит куча из 2018 спичек. Двое играют в такую игру: за один ход начинающий может взять 1, 2, 3 или 4 спички, а второй игрок – 1, 2, 3 спички или пропустить ход. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре обоих?

9. На турнир приехали 66 участников. Известно, что среди любых четырех из них найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что среди участников турнира есть по крайней мере 2018 пар знакомых.

10. Квадрат перегнули, как показано на рисунке, и вписали окружность в образовавшийся треугольник. Докажите, что радиус этой окружности равен длине отрезка MN.