Устная командная олимпиада по математике, 10-11 класс, 2020 г.

Задача 1. Пусть $\sigma(n)$ – количество натуральных делителей числа n. Найдите все натуральные n, для которых $(\sigma(n))^3 = 4n$.

Ответ: 2, 128, 2000.

Решение. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Тогда $(\alpha_1+1)^3(\alpha_2+1)^3 \dots (\alpha_k+1)^3 = 4p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Значит, левая часть делится на 2, а потому и на 8. Получаем, что $p_1 = 2$.

Заметим, что каждое простое входит в разложение правой части в степени, которая кратна 3, поэтому можно записать, что $\alpha_1 = 3\beta_1 + 1$, $\alpha_i = 3\beta_i$ при $i \geqslant 2$, где β_i — натуральные при $i \geqslant 2$. Тогда левая часть последнего равенства сравнима с 2 по модулю 3, а значит, n не делится на 3. Поэтому наше соотношение переписывается так:

$$(2+3\beta_1)(1+3\beta_2)\dots(1+3\beta_k) = 2^{1+\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k},$$

где $p_i \geqslant 5$.

Рассмотрим пару множителей $2^{1+\beta_1}$ и $2+3\beta_1$. Заметим, что при $\beta_1 \geqslant 3$ по неравенству Бернулли имеем

$$2^{1+\beta_1} \geqslant 1 + (1+\beta_1) + \frac{(1+\beta_1)\beta_1}{2} \geqslant 2 + 3\beta_1$$

(последнее неравенство эквивалентно неравенству $\beta_1 \geqslant 3$), причем первое неравенство строгое при $\beta_1 > 0$.

Теперь рассмотрим произвольную пару $p_i^{\beta_i}$ и $1+3\beta_i$ при $i \geqslant 2$ (если такая есть). По неравенству Бернулли получаем

$$p_i^{\beta_i} \geqslant (1+4)^{\beta_i} \geqslant 1 + 4\beta_i > 1 + 3\beta_i.$$

Значит, при $\beta_1 \geqslant 3$ решений нет.

При $\beta_1 = 0$ или 2 имеем $2^{1+\beta_1} = 2 + 3\beta_1$, поэтому в этих случаях остальные сомножители отсутствуют (иначе правая часть нашего произведения будет больше левой). Отсюда получаем ответы $n = 2$ или 128.

При $\beta_1 = 1$ получаем соотношение

$$5(1+3\beta_2)\dots(1+3\beta_k) = 4p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}.$$

Значит, правая часть делится на 5 и без ограничения общности можно считать, что $p_2 = 5$. Тогда рассмотрим пару чисел $4 \cdot 5^{\beta_2 - 1}$ и $1 + 3\beta_2$. Заметим, что при $\beta_2 \geqslant 2$ по неравенству Бернулли имеем

$$4 \cdot 5^{\beta_2-1} \geqslant 4 \cdot (1 + 4(\beta_2 - 1)) = 16\beta_2 - 12 > 1 + 3\beta_2,$$

поэтому $\beta_2 = 1$, а остальные простые числа отсутствуют. В этом случае находим $n = 2^4 \cdot 5^3 = 2000$. □

Задача 2. На плоскости нарисованы 100 единичных кругов. Известно, что площадь любого треугольника с вершинами в центрах кругов не превосходит 2020. Докажите, что существует прямая, пересекающая хотя бы три круга.

Решение. Рассмотрим всевозможные отрезки между центрами и выберем самый длинный из них (если таких отрезков несколько, выберем любой). Назовем его AB. Если на AB лежит еще хотя бы один центр, то в качестве прямой можно взять прямую (AB). В противном случае все остальные центры образуют с точками A и B треугольник. Более того, эти центры находятся в полоске, которая получается, если провести через A и B прямые, перпендикулярные AB.

Рассмотрим произвольный центр C. Т.к. $S(ABC) \leqslant 2020$, то расстояние от C до AB не больше $2S(ABC)/AB$. Получается, что если длина отрезка AB равна s, то центры всех окружностей должны лежать в прямоугольнике $s \times \dfrac{8080}{s}$.

Тогда одна из сторон этого прямоугольника не больше $\sqrt{8080} < 90$. Рассмотрим проекции кругов на эту сторону. Каждая проекция имеет длину 2 поэтому проекции покрывают область, находящуюся на отрезке длины 92. Поскольку отрезков ровно 100, по принципу Дирихле найдутся три отрезка, имеющие общую точки. Прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно стороне прямоугольника, будет искомой. □

Задача 3. Найдите все многочлены $P(x, y)$, для которых при любых положительных x и y выполнено $P(x, y) = P(x + y, y - x)$.

Ответ: $P(x, y) = C$.

Решение. Докажем, что соотношение $P(x, y) = P(x + y, y - x)$ будет выполняться при всех вещественных числах x, y. Для этого запишем многочлен $F(x, y) = P(x, y) - P(x + y, x - y)$ в следующем виде:

$$F(x, y) = P(x, y) - P(x + y, x - y) = f_n(y)x^n + f_{n-1}(y)x^{n-1} + \dots + f_1(y)x + f_0(y),$$

где $f_i(y)$ — многочлены от одной переменной. Предположим, что хотя бы один из многочленов f_i — не тождественный 0. Тогда существует точка $y_0 > 0$, в которой многочлен $F(x, y_0)$ не тождественный 0: $F(x, y_0) \not\equiv 0$. Но с другой стороны, это многочлен от одной переменной, который равен 0 при всех $x > 0$ — противоречие. Значит, $f_i \equiv 0$ и $F(x, y) \equiv 0$ для любых x, y.

Вернемся к решению задачи. Заметим, что $P(x, y) = P(x + y, y - x) = P(2y, -2x) = P(2y - 2x, -2x - 2y) = P(-4x, -4y)$. Прокрутим эту цепочку рассуждений еще раз и получим, что $P(x, y) = P(-4x, -4y) = P(16x, 16y)$. Тогда значение многочлена в любой точке можно загнать в малую окрестность начала координат, поскольку $P(a, b) = P(a/16, b/16)$. В силу непрерывности многочлена, значение в начале координат и будет приниматься на всей плоскости. □

Задача 4. Пусть c – фиксированное положительное число, не большее 1. Найдите все положительные λ для которых при любом положительном μ выполнено неравенство

$$\frac{\lambda}{\sqrt{c\mu+1}}+\frac{\mu}{\sqrt{c+\mu^2}}\leqslant\frac{\lambda+1}{\sqrt{c+1}}$$

Ответ: 2

Решение. Рассмотрим функцию $f_\lambda(x)=\lambda(cx+1)^{-\frac{1}{2}}+x(x^2+c)^{-\frac{1}{2}}$. Заметим, что условие переписывается в виде $f_\lambda(x)\leqslant f_\lambda(1)$ для любого $x>0$. Значит, функция $f_\lambda(x)$ должна иметь максимум в точке 1, то есть $f'_\lambda(1)=0$. После вычислений получаем

$$f'_\lambda(x)=c(x^2+c)^{-3/2}-\frac{\lambda c}{2}(cx+1)^{-3/2},$$

откуда

$$f'_\lambda(1)=c(c+1)^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)=0.$$

Следовательно, $\lambda=2$. Более того, знак производной $f'_2(x)$ равен знаку разности

$$(x^2+c)^{-3/2}-(cx+1)^{-3/2},$$

а этот знак в свою очередь совпадает со знаком разности $-(x^2+c)+(cx+1)$ в силу монотонного убывания функции $y=t^{-3/2}$. Наконец,

$$-(x^2+c)+(cx+1)=-(x-1)(x+1-c).$$

Вторая скобка положительна при $x>0$, т.к. $c\leqslant 1$, поэтому при знак производной $f'_2(x)$ меняется с плюса на минус при проходе через точку $x=1$. Значит, функция f_2 достигает максимума при $x=1$ и при $x\neq 1$ $f_2(x)<f_1(1)$, а потому $\lambda=2$ действительно является ответом. □

Задача 5. Клетчатый многоугольник разбили на доминошки 1×2. Какое наименьшее число четных сторон у него может быть?

Ответ: 2.

Решение. Пример двух четных сторон доставляет одна доминошка.

Теперь разберемся с оценкой. Ровно одной четной стороны в нашем многоугольнике быть не может. Действительно, при обходе контура многоугольника мы совершим четное число шагов по горизонтали и четное число шагов по вертикали, причем вертикальных и горизонтальных ходов будет поровну. Но если в многоугольнике есть ровно одна нечетная сторона, то количества горизонтальных и вертикальных ходов имеют разную четность — противоречие.

Докажем, что не существует такого многоугольника вообще без четных сторон. Предположим противное. Покрасим клетки нашего многоугольника в шахматном порядке. Посчитаем горизонтальные стороны в черных клетках всех доминошек и в белых клетках всех доминошек (отрезки внутри многоугольника при этом будут считаться два раза — один раз в белых клетках, и один раз в черных клетках). Поскольку наш многоугольник можно разрезать на доминошки, эти количества должны совпадать (т.к. они совпадают в каждой доминошке).

С другой стороны, т.к. все стороны многоугольника имеют нечетную длину, то на границе многоугольника клеток одного цвета (скажем, черного) будет больше, а значит, сумма длин черных отрезков, лежащих на границе многоугольника, тоже будет больше. А отрезков внутри многоугольника будет поровну, т.к. каждый отрезок является границей между белой и черной клеткой, и потому он даст одинаковый вклад в каждую из сумм. Но тогда сумма отрезков в черных клетках больше. Получаем противоречие. □

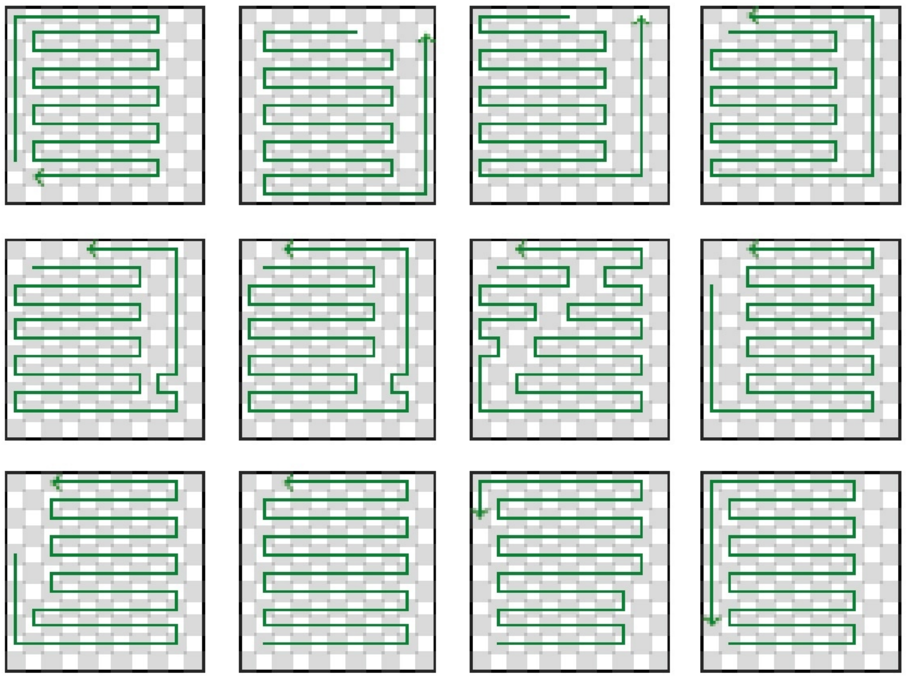
Задача 6. На клетчатой доске $n \times n$ находится змейка длины k, представляющая собой упорядоченный набор различных клеток $(s_1, \dots, s_k)$, каждая следующая клетка в котором имеет общую сторону с предыдущей. Клетка s_1 называется головой змейки. Змейка может ползать по доске, передвигаясь в клетку s, граничащую с головой змейки, т.е. становясь набором $(s, s_1, \dots, s_{k-1})$. За границы доски змейка выползать не может. Если в некоторый момент времени змейка занимала клетки $(s_k, \dots, s_1)$, мы будем говорить, что она развернулась относительно своего начального положения $(s_1, \dots, s_k)$.

Докажите, что для достаточно больших n можно расположить на доске $n \times n$ змейку длины не менее $0{,}99n^2$ так, что она сможет развернуться.

Решение. Из рис. ниже видно, как сможет развернуться змейка длины

$$k = (n-1)(n-2) - 1$$

(рисунки нужно смотреть слева направо и сверху вниз). Ясно, что при достаточно больших n будет выполнено неравенство $k > 0{,}99n^2$.



□

Задача 7. Верно ли, что для каждого натурального n существует n-значное число, не содержащее нулей и кратное своей сумме цифр?

Ответ: Верно.

Решение. Как известно, если $n = 3^k$, то число, составленное из 3^k единиц, делится на 3^k.

Далее, рассмотрим $2 < n < 9$. Построим примеры для таких n следующим образом. Возьмем число 111111111, а затем будем стирать у него первую цифру и добавлять ее в разряд поменьше так, чтобы сумма цифр не изменилась и делимость тоже не испортилась. Получится такой процесс:

$$111111111 \to 11211111 \to 1221111 \to 222111 \to 22311 \to 2331 \to 333.$$

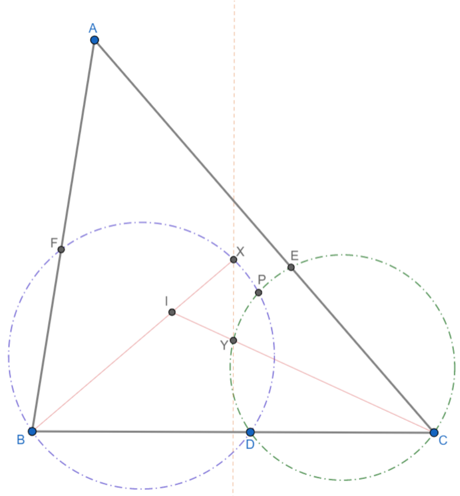
Для $n = 2$ и 1 можно взять числа 21 и 3 соответственно.

Пусть теперь $9 < n < 27$. Возьмем пример для $n = 3^3$ и будем перестраивать его:

$$1 \dots 11 \dots 11 \dots 1 \to 1 \dots 12 \dots 11 \dots 1 \to 1 \dots 122 \dots 11 \dots 1 \to \dots \to$$
$$\to 2 \dots 21 \dots 1 \to 2 \dots 23 \dots 1 \to 2 \dots 233 \dots 1 \to 3 \dots 3.$$

В общем виде конструкция выглядит так. Пусть $3^{t-1} < n < 3^t$. Возьмем число из 3^t единиц и разобьем его на три равных блока длины 3^{t-1}. Начнем стирать цифры из первого блока и добавлять их во второй блок к соответствующей цифре. При каждой операции у нас разница между числами меняется на число, кратное $9 \cdot 1 \dots 1$ (где во втором множителе 3^{t-1} цифр). Следовательно, делимость на 3^t текущего числа при нашем процессе инвариантна. Когда первый блок будет исчерпан, мы проделаем такую же процедуру со вторым и третьим блоком. В конце нашего процесса количество цифр будет совпадать с количеством цифр третьего блока, т.е. 3^{t-1}. □

Задача 8. На стороне BC треугольнике ABC выбирается точка D. Точки E и F выбраны на сторонах AC и AB соответственно так, что $BF = CD$ и $CE = BD$. Описанные окружности треугольников BDF и CDE вторично пересекаются в точке P. Докажите, что существует точка Q такая, что вне зависимости от положения точки D расстояние PQ постоянно.



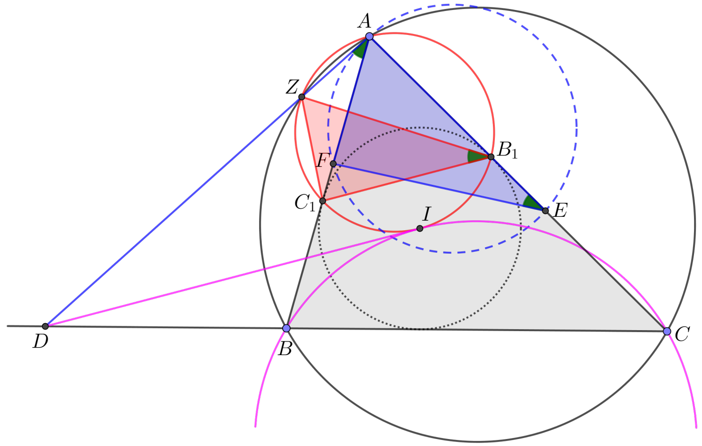
Решение. Рассмотрим серединный перпендикуляр к BC и его пересечения X и Y с биссектрисами углов B и C соответственно. Докажем, что точка X лежит на описанной окружностях BDF. Заметим, что треугольники BFP и CDP равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $\angle PFB = \angle PDC$. Это и означает, что точки B, D, P и F лежать на одной окружности. Для точки Y и описанной окружности треугольника CDE рассуждения аналогичны.

Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Заметим, что $\angle IXP = \angle CDP = \angle CYP$, то есть точка P лежит на описанной окружности треугольника IXY. Значит, центр Q этой окружности и будет искомым. □

Задача 9. В треугольнике ABC отмечены центр вписанной окружности I и точки B_1 и C_1 касания вневписанных окружностей напротив вершин B и C соответственно. Точка D выбрана на прямой BC так, что $\angle AID = 90°$. Докажите, что прямая AD касается описанной окружности треугольника AB_1C_1.

Решение. Пусть E и F — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB соответственно. Рассмотрим описанную окружность четырехугольника $AFIE$. Она пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках A и Z.

Заметим, что точки A, Z и D коллинеарны в силу теоремы о радикальном центре для окружностей (ABC), $(AFIE)$ и (BIC).



Ясно, что точка Z — точка Микеля четырехугольника $BFEC$, поэтому треугольники ZBF и ZCE подобны (даже поворотно-гомотетичны с центром в Z). Значит,

$$\frac{ZF}{ZE} = \frac{BF}{CE} = \frac{AC_1}{AB_1}$$

(последнее равенство верно, т.к. $BF = p - AC - AC_1$ и $BE = p - AB = AB_1$). Отсюда следует, что треугольники ZEF и AB_1C_1 подобны по второму признаку, и

$$\angle DAB = \angle ZAF = \angle ZEF = \angle AB_1C_1.$$

По обратной теореме об угле между касательной и хордой получаем требуемое. □

Задача 10. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,1]$. Известно, что любая горизонтальная прямая, пересекающая график $f(x)$, пересекает его ровно в двух точках. Докажите, что $f(x)$ имеет бесконечно много точек разрыва.

Решение. Предположим противное: пусть точек разрыва конечное число. Рассмотрим эти точки, концы отрезка $[0;1]$, а также парные к ним точки (значения в которых совпадают со значениями в точках разрыва или концах отрезка). Тогда останется нечетное количество интервалов, на которых функция f непрерывна. На каждом интервале функция f или монотонна, или имеет ровно один экстремум (максимум или минимум). Значит, монотонные промежутки должны разбиваться на пары (иначе горизонтальные прямые пересекут какую-то точку ровно на одном из них), и промежутки с экстремумами должны разбиваться на пары (потому что минимум или максимум достигается только в одной точке этого промежутка). Но тогда общее количество промежутков четно — противоречие. □