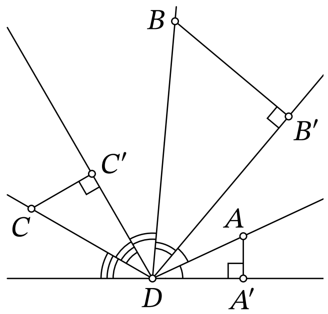
Устная командная олимпиада по математике, 2020 год

Задача 1. Алиса и Боб играют в следующую игру. На плоскости нарисованы n точек общего положения. Игроки по очереди выбирают две точки и соединяют их отрезком. Проигрывает тот, после чьего хода возникает цикл нечетной длины. Первой ходит Алиса. Найти все n, при которых у нее есть выигрышная стратегия.

Задача 2. В таблице $n \times n$ изначально все числа равны 0. С таблицей разрешается проделывать операции следующего вида: можно выбрать n чисел, никакие два из которых не стоят в одной строке или в одном столбце, а также выбрать действительное число x, после чего к каждому выбранному числу в таблице прибавить x, а из остальных чисел вычесть $\frac{x}{n-1}$. Докажите, что такими операциями можно получить все возможные таблицы, в которых сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 0.

Задача 3. Все простые числа от 1 до n раскрасили в два цвета: синий и красный ($n > 3$ — натуральное число). Оказалось, что модуль разности произведений синих и красных чисел меньше n. Чему он может быть равен?

Задача 4. Дано $DA' + DC' = DB'$. Докажите, что $ABCD$ вписанный.



Задача 5. Для положительных чисел $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ докажите, что максимальное значение выражения

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n}{(1 + a_1)(a_1 + a_2)\ldots(a_{n-1} + a_n)(a_n + 2^{n+1})}$$

существует, и найдите его.

Задача 6. Множество A натуральных чисел таково, что у любых двух его различных подмножеств различные суммы. Докажите, что сумма обратных величин элементов множества A не более 2.

Задача 7. На шахматной доске $(4n+2)\times(4n+2)$ в углу стоит черепашка ($n \geqslant 0$). За один ход она может переползти в соседнюю по стороне клетку. Черепашка проползла по всем клеткам доски, побывав на каждой ровно по одному разу, и вернулась в исходную угловую клетку. Найти наибольшее натуральное k , такое, что вне зависимости от маршрута найдется такой ряд (строка или столбец), на который черепашка заползет не меньше k раз.

Задача 8. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^3 + y^3 = 2020(x^2y + xy^2 + 1).$$

Задача 9. У Дирихле есть семь клеток: в одной из них сидит 1 кролик, в другой — 2, в третьей — 3, ..., в седьмой — 7. Сколько существует способов пронумеровать клетки от 1 до 7 так, чтобы ровно в одной клетке количество кроликов было больше, чем её порядковый номер?

Задача 10. Через вершину D квадрата $ABCD$ проведена прямая ℓ, не пересекающая сторон квадрата. Луч CA пересекает ℓ в точке E. На луче ED за точкой D выбрана точка F такая, что $\angle DCF = 45°$. Оказалось, что $AE = CF$. Найдите угол CFD.