Устная командная олимпиада по математике, 10-11 класс, 2021 год

Задача 1. Назовем натуральное число приятным, если оно не делится на 47. Докажите, что в любом множестве из 10000 приятных чисел можно выбрать подмножество из 2021 элемента так, что любая знакопеременная сумма его пяти элементов тоже будет приятной. *Для целых чисел приятность определяется аналогично.*

Задача 2. Найдите все многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$ такие, что если для действительных a и b значение $a + b$ — точный квадрат, то $P(a) + P(b)$ тоже.

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Точки E и F выбраны на сторонах AB и AC соответственно, причем $\angle BAC = \angle EOF$. Докажите, что периметр треугольника AEF не меньше, чем BC.

Задача 4. На оффлайн-собрании присутствовали $12k$ людей, причем каждый пожал руку ровно $3k + 6$ другим участникам. Известно, что для любой пары людей число пожавших руку обоим одинаковое. Сколько человек могло быть на собрании?

Задача 5. На окружности радиуса 13 отметили 13 точек. Верно ли, что всегда можно выбрать три из них так, что площадь соответствующего треугольника будет меньше 13?

Задача 6. В описанном четырехугольнике $ABCD$ точка I – центр вписанной окружности. Лучи AB и DC пересекаются в точке F, а лучи AD и BC – в точке G. Эллипс ω с фокусами в F и G проходит через точки B и D. Ветвь гиперболы γ с фокусами в F и G проходит через точки A и C. Кривые ω и γ пересекаются в точках P и Q. Докажите, что точки I, P и Q лежат на одной прямой.

Задача 7. Пусть r и s — натуральные числа. Положим $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. Обозначим также $f_n = a_1 a_2 \dots a_n$. Докажите, что $f_m f_n \mid f_{m+n}$ для всех натуральных m и n.

Задача 8. Внутри квадратной таблицы $n{\times}n$ закрашены клетки некоторого квадрата $k \times k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Разрешается перекрашивать клетки выбранной строки или выбранного столбца. Какое наибольшее количество закрашенных клеток можно получить в таблице с помощью таких операций?

Задача 9. Обозначим за $p(n)$ наибольший простой делитель числа $n \geqslant 2$. Верно ли, что существует бесконечно много таких n, что $p(n) < p(n + 1) < p(n + 2)$?

Задача 10. Пусть $f(x), g(x) : [0; +\infty) \longrightarrow [0; +\infty)$ — непрерывные функции. Известно, что

- $f(0) = g(0) = 0$;
- $g(x) \neq 0$ при всех положительных x;
- $f(x + g(f(x))) = f(x)$ при всех неотрицательных x.

Докажите, что $f(x) = 0$ при всех неотрицательных x.