Устная командная олимпиада по математике, 8-9 класс, 2021 год

Задача 1. В одной из клеток квадрата 2021×2021 находится невидимый таракан. У Лёши есть тапок, которым он раз в минуту ударяет по квадрату 50×50; каждый раз в момент удара таракан перебегает на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что Лёша сможет убить таракана.

Задача 2. На оффлайн-собрании присутствовали $12k$ людей, причем каждый пожал руку ровно $3k+6$ другим участникам. Известно, что для любой пары людей число пожавших руку обоим одинаковое. Сколько человек могло быть на собрании?

Задача 3. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C = 90°$. На диагонали BD выбраны точки M, N так, что $AN \parallel BC$, $CM \parallel AB$. На сторонах AD и CD соответственно выбраны точки X и Y так, что $\angle XNB = \angle YMD = 90°$. Докажите, что отрезок AC равен полупериметру треугольника BXY.

Задача 4. Дан клетчатый квадрат со стороной 1000. За один ход разрешается взять любой прямоугольник (или квадрат) и разрезать его по линиям сетки на два прямоугольника, а сразу же после этого разрезать один из получившихся прямоугольников так, чтобы второй разрез был перпендикулярен первому. Какое наибольшее количество единичных квадратиков можно получить спустя несколько таких ходов? (Ход нельзя применять к прямоугольнику со стороной 1.)

Задача 5. Дан набор целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2000}$, по модулю не превосходящих 1000. Известно, что сумма всех чисел набора равна 1. Докажите, что в наборе $a_1, a_2, \dots\ a_{2000}$ найдется поднабор с суммой 0.

Задача 6. Даны натуральные числа n и k, причем $n \geqslant k$. В группе из n человек каждый либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Антон может задать всякому человеку следующий вопрос: «Какова чётность количества рыцарей в множестве A?», где A — подмножество группы из n людей, в котором всего k человек. Ответ на этот вопрос может быть «чётно» или «нечётно». При каких k и за какое минимальное число вопросов можно узнать про каждого, кем он является?

Задача 7. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$(ab + bc + ca + 1)(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 2abc(a + b + c + 1)^2.$$

Задача 8. Докажите, что для каждого натурального $k > 1$ найдется бесконечно много натуральных n таких, что

$$\text{НОК}(n, (n + 1), \dots, (n + k)) > \text{НОК}((n + 1), (n + 2), \dots, (n + k + 1)).$$

Задача 9. На доске нарисовано несколько точек. Каждую секунду выбирают какие-то три точки, и заменяют их на середины соединяющих их отрезков. Докажите, что через некоторое время найдутся три точки, которые можно накрыть кругом радиуса 1.

Задача 10. На окружности с центром в точке O отмечены точки A, B, C (именно в таком порядке). Известно, что $\angle AOB = 36°$, $\angle BOC = 72°$. Прямые MC и OB пересекаются в точке X, где M — середина отрезка AO. На отрезке OB отмечена точка Y так, что $BY = OX$. Докажите, что CY равняется радиусу окружности.