Устная командная олимпиада по математике, 10-11 класс, 2023 год

Задача 1.

Пусть $p > 2$ простое число, а целые числа a, b, c, d не делятся на p, причем

$$\left\{\frac{ra}{p}\right\} + \left\{\frac{rb}{p}\right\} + \left\{\frac{rc}{p}\right\} + \left\{\frac{rd}{p}\right\} = 2$$

для любого целого r, не кратного p. Докажите, что хотя бы два числа из набора $\{a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d\}$ делятся на p.

Решение. Легко видеть, что $a + b + c + d$ делится на p, раз сумма дробных частей целая. Заменим числа на остатки по модулю p и упорядочим $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d < p$. Можно считать, что $a = 1$, иначе подберем такое r, чтобы уже $a' = ra$ стало давать остаток 1 и уже потом будем с новым набором работать. Тогда остается доказать, что $d = p - 1$. (Тогда две искомых пары это $a + d$ и $b + c$.) Докажем вспомогательные утверждения.

Утверждение. Для любого ненулевого остатка r верно, что $\left[\frac{rb}{p}\right] + \left[\frac{rc}{p}\right] + \left[\frac{rd}{p}\right] = 2(r-1)$.

Доказательство: подставим $r = 1$ в исходное условие и получим, что $a + b + c + d = 2p$. Если теперь расписать сумму целых частей $\left[\frac{ra}{p}\right] + \left[\frac{rb}{p}\right] + \left[\frac{rc}{p}\right] + \left[\frac{rd}{p}\right]$ как сумму чисел минус сумму дробных, то в точности получим $2r - 2$.

Утверждение. Для любого $r = 1, 2, ..., p - 2$ верно, что $\frac{r-1}{r} < \frac{d}{p} < 1$.

Доказательство: с учетом предыдущего утверждения это эквивалентно тому, что

$$\left[\frac{rb}{p}\right] + \left[\frac{rc}{p}\right] = \left[\frac{rd}{p}\right] = r - 1.$$

Рассмотрим минимальное $r > 1$, для которого это утверждение неверно. Отсюда

$$r - 1 > \left[\frac{rd}{p}\right] \geqslant \left[\frac{(r-1)d}{p}\right] = r - 2.$$

Тогда $\left[\frac{rb}{p}\right] + \left[\frac{rc}{p}\right] = r$, а значит $\left[\frac{rb}{p}\right] > \left[\frac{(r-1)b}{p}\right]$ и $\left[\frac{rc}{p}\right] > \left[\frac{(r-1)b}{p}\right]$. Сейчас дроби $\frac{b}{p}$, $\frac{c}{p}$ лежат правее некоторых дробей $\frac{s}{r}$ и $\frac{r-s}{s}$ соответственно. С учетом свойств ряда Фарея имеем $\frac{s}{r} < \frac{b}{p} \leqslant \frac{s+1}{r+1}$ и $\frac{r-s}{r} < \frac{c}{p} \leqslant \frac{r-s+1}{r+1}$. По предположению $\frac{d}{p} < \frac{r-1}{r}$, тогда $\frac{d}{p} < \frac{r}{r+1}$. Но тогда $\left[\frac{(r+1)b}{p}\right] + \left[\frac{(r+1)c}{p}\right] + \left[\frac{(r+1)d}{p}\right] = s + (r-s) + r - 1 = 2r - 1$.

Используем утверждение выше и получаем, что $\frac{p-3}{p-2} < \frac{d}{p}$, а значит $d > p - 1 - \frac{2}{p-2}$. Но тогда $d = p - 1$.

□

Задача 2. Дано натуральное $n \geqslant 2$. Король и Принц играют в следующую игру. Они по очереди (начинает Король) заполняют пропуски коэффициентами в многочлене:

$$x^{2n} + \_x^{2n-1} + \_x^{2n-2} + ... + \_x + 1.$$

Если итоговый многочлен имеет действительный корень, то побеждает Принц. Может ли Король ему помешать?

Ответ: Не может.

Решение. Принц будет ходить так, чтобы перед двумя последними ходами остался не заполнен хотя бы один коэффициент при нечетной степени. Почему так можно? Ну у нас $2n-1$ позиция, причем нечетных на одну больше, чем четных. Мы можем каждым ходом ставить произвольное число перед четной степенью, пока можем, а если не можем, то как угодно ставим. Тогда за $2n-3$ хода останется точно не более одного пустого коэффициента при четной степени, ведь Принц сделал $n-2$ своих хода. Тогда один из оставшихся точно при нечетной степени. Пусть теперь наш многочлен устроен так: $P(x) + \_x^s + \_x^{2t-1}$ (первое слагаемое это уже заполненное, остальное мы еще разыгрываем). Тогда мы за Принца подберем такой коэффициент a при x^s, что при любом коэффициенте при нечетной степени будет корень у итогового многочлена. Положим $a = -\frac{\frac{1}{2^{2t-1}}P(2) + P(-1)}{2^{s-2t+1} + (-1)^s}$. Непосредственно проверяется, что у итогового многочлена значения в -1 и 2 имеют разные знаки (либо они нули), а значит есть корень.

□

Задача 3. На плоскости нарисованы 2023 различных круга радиуса 1. Докажите, что можно выбрать множество S из 27 кругов так, что либо в множестве S любые два круга пересекаются, либо в множестве S любые два круга не пересекаются. (Касание мы здесь тоже будем понимать как пересечение.)

Решение. Рассмотрим самый верхний круг S и построим концентрический ему круг S' радиуса 2. Посмотрим на круги, которые пересекают S. Рассмотрим три нижних сектора круга S' с углами 60 градусов. Каждый пересекающий S круг имеет центр в одном из этих трех секторов, раз в верхних секторах по нашему выбору не может быть точек. Если мы нашли 76 таких кругов, тогда не менее 26 центров окажутся в одном секторе, что обеспечит попарное пересечение нужного числа кругов (поскольку в секторе все точки лежат на расстоянии, не более 2). Значит, кругов будет меньше. Выкинем наш круг и все те, что его пересекали. Это 77 кругов. А потом будем повторять операцию. Если в какой-то момент мы нашли много попарно пересекающихся кругов, то уже победили. В противном случае мы сделаем операцию минимум $2023/77 > 26$ раз. А значит 27 попарно не пересекающихся кругов сможем выбрать, взяв из каждой группы первый круг. □

Задача 4.

Найдите наибольшее натуральное k, для которого все натуральные числа можно разбить на k множеств таким образом, чтобы для любого натурального $n \geqslant 15$ в любом из полученных множеств можно было найти два различных элемента с суммой n.

Ответ: $k = 3$.

Решение. В качестве примера возьмем множества $\{1, 2, 3, 12, 15, 18, ...\}$, $\{4, 5, 6, 11, 14, 17, ...\}$, $\{7, 8, 9, 10, 13, 16, ...\}$. Они подходят, потому что каждому n нужно просто за счет первых трех чисел подкрутить нужный остаток при делении на 3.

Для доказательства оценки заметим, что если мы смогли разбить требуемым образом натуральный ряд на несколько множеств, то можем и склеить множества разбиения без нарушения условий. А значит достаточно доказать, что для 4 множеств это неверно. Рассмотрим теперь суммы 15, 16, ..., 24. Их можно получать только из чисел от 1 до 23. При этом раз сумм всего 10, то в каждом множестве должно быть хотя бы 5 элементов из этого списка. Но при этом не может быть в каждом из множеств хотя бы 6 элементов, иначе их уже будет 24. Следовательно, есть множество, где их ровно 5, а значит всевозможные попарные суммы этих элементов дают $15 + 16 + ... + 23 = 195$. Но каждый элемент 4 раза учитывался в попарных суммах. Противоречие.

$\square$

Задача 5.

Существует ли многочлен с действительными коэффициентами $P(x, y)$, который неотрицателен при всех значениях x, y, но при этом не может быть представлен в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами?

Ответ: Да.

Решение. Рассмотрим $P(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)x^2y^2 + \frac{1}{27}$. Легко видеть, что $P(x, y) \geqslant 0$. Если первый множитель неотрицателен, то это очевидно, а если отрицателен, то

$$(1 - x^2 - y^2)x^2y^2 \leqslant \left(\frac{1 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{3}\right)^3 \leqslant \frac{1}{27}.$$

Пусть многочлен представлен в виде суммы квадратов многочленов. Тогда степень каждого одночлена не более 3, чтобы после возведения в квадрат она была не более 6. Распишем их с неопределенными коэффициентами в виде $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J$. Легко убедится, что если сумма квадратов подобных многочленов равна нашему, то коэффициенты A, D – нулевые. Аналогично E, G – нулевые. Затем H и I – нулевые. Но тогда рассмотрим коэффициент при xy. С одной стороны он равен сумме квадратов коэффициентов F, а с другой – -1. Противоречие.

$\square$

Задача 6.

В треугольнике ABC отметили центр вписанной окружности I и точку пересечения медиан G. Пусть P_A – основание перпендикуляра из точки C, опущенного на внешнюю биссектрису угла B, а Q_A – основание перпендикуляра из точки B на внешнюю биссектрису угла C. Аналогично определяются точки P_B, P_C, Q_B и Q_C. Докажите, что точки P_A, P_B, P_C, Q_A, Q_B, и Q_C лежат на одной окружности, центр которой лежит на прямой IG.

Решение. Пусть M_A, M_B, M_C – середины BC, CA, AB соответственно и I_A, I_B, I_C – центры вневписанных окружностей треугольника ABC соответственно. Заметим, что $\angle BP_AC = 90°$, поэтому $M_AB = M_AC = M_AP_A$. Итак, $\angle BM_AP_A = 180° - 2\angle CBI_A = 180° - 2\left(90° - \frac{\angle ABC}{2}\right) = \angle ABC$. Следовательно, $M_AP_A \parallel AB$, а так как $M_AM_B \parallel AB$, то получаем $P_A \in M_AM_B$. Аналогично доказывается, что $Q_B \in M_AM_B, Q_A, Q_C \in M_CM_A$ и $P_B, P_C \in M_BM_C$. Тогда $M_AQ_B = M_AM_B + M_BQ_B = M_CA + M_BA = M_CQ_C + M_AM_C = M_AQ_C$. Аналогично мы можем показать, что $M_BP_A = M_BP_C$ и $M_CQ_A = M_CP_B$. Таким образом, биссектриса угла $\angle M_BM_AM_C$ является серединным перпендикуляром как P_AQ_A, так и Q_BQ_C. Аналогичным образом мы можем показать, что биссектриса $\angle M_CM_BM_A$ является серединным перпендикуляром P_CP_A и P_BQ_B, а биссектриса $\angle M_AM_CM_B$ является серединным перпендикуляром Q_AP_B и P_CQ_C. Пусть I_M – центр вписанной окружности треугольника $M_AM_BM_C$. Тогда $I_MP_A = I_MQ_A = I_MP_B = I_MQ_B = I_MQ_C = I_MP_C$, что делает I_M желаемым центром шести точек. Гомотетия с центром в G переводит треугольник ABC в треугольник $M_AM_BM_C$, и эта же гомотетия должна переводить I в I_M. Таким образом, I_M лежит на IG. $\square$

Задача 7.

Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. На биссектрисах CI и AI отмечены пары точек C_1, C_2 и A_1, A_2 соответственно таким образом, что $\angle C_1BC = \angle A_1BA = 90°$, а точки I, A_2, B, C_2 лежат на одной окружности. Прямые A_1C_1 и A_2C_2 пересекаются в точке P, а медианы треугольника IA_2C_2 пересекаются в точке M. Прямая PM пересекает биссектрисы CI и AI в точках R, S соответственно, а прямые A_1R и C_1S пересекаются в точке X. Докажите, что X равноудалена от точки B и прямой AC.

Решение.

Будем доказывать, что X лежит на параболе с фокусом B и директрисой AC. Эта парабола касается биссектрис в точках A_1, B_1. Из вписанности четырехугольника следует, что и A_2C_2 касается параболы, пусть в точке X' (известное утверждение: фокус параболы, касающейся трех сторон треугольника, лежит на его описанной окружности). По теореме Паскаля для $A_1A_1X'X'C_1C_1$ точки P, R', S' лежат на одной прямой ($R' = A_1X' \cap IC_2$, $S' = C_1X' \cap IA_2$). надо показать, что на этой же прямой лежит точка пересечения медиан треугольника. Если это так, значит, $R' = R, S' = S$. Ну а тогда $X' = X$.

Теперь покажем, почему на той самой прямой, которая проходит через точки пересечения сторон треугольника из точек касания с соответствующими сторонами описанного треугольника вокруг параболы, лежит точка пересечения медиан. Для этого афинно переведем наш треугольник в правильный (пусть со стороной 1). Тогда вписанная парабола ей же и останется. Более того, известно, что если парабола касается стороны AC и продолжений сторон AB, BC треугольника ABC в точках B', C', A' соответственно, то $\frac{C'A}{AB} = \frac{BC}{CA'}$ (например, потому, что фокус параболы – центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок YA в AZ, где Y, Z – точки касания параболы с AB и AC). Но это просто означает, что мы знаем, в каком отношении делятся стороны равностороннего треугольника точками касания. И задача сведется к следующей:

стороны AB и AC равностороннего треугольника поделили в отношении $\frac{x+1}{x}$ и $\frac{x+1}{1}$ считая от вершины A. Докажите, что отрезок между этими точками содержит центр треугольника. Решается, например, с помощью теоремы Менелая.

□

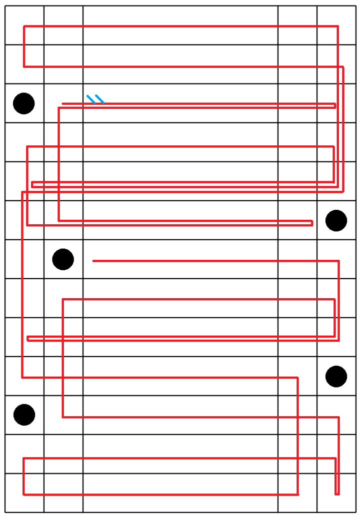
Задача 8.

Лабиринт представляет собой таблицу 13×26, некоторые клетки которой мы занимаем блоками. После размещения блоков в таблице мы ставим робота на ячейку и он начинает двигаться в одном из направлений вправо, влево, вниз или вверх. Он может изменить направление (любым образом) только тогда, когда достигнет блока или границы лабиринта. Найдите наименьшее число m такое, чтобы мы могли разместить в лабиринте m блоков и выбрать стартовую клетку для робота так, чтобы он мог посетить все свободные клетки.

Ответ: $m = 5$.

Решение.

Оценка: если на столе есть блок, робот может изменить направление, когда достигнет ячейки над или под блоком, а это значит, что один блок означает, что робот может скользить (идти по направлению) в ряду выше или под ним. Предположим, что на столе лежит m блоков. Если робот может скользить по каждому ряду (возможно, не по всем клеткам ряда, а только по нескольким), этим блокам соответствует $2m$ рядов. При этом строка, содержащая стартовую ячейку робота, может не соответствовать ни одному блоку. Причем верхний/нижний ряд также может не соответствовать какому-либо блоку, поскольку робот может коснуться границы и скользить по верхнему/нижнему ряду. Итак, у нас должно быть $2m+3 \geqslant 13$. Пример изображен на картинке.



□

Задача 9. Даны натуральные числа $m > 1$ и $n > 2$ и действительные числа $p, q > 0$, удовлетворяющие условию $p + q = 1$. Докажите неравенство

$$(1-p^m)^n + np^m(1-p^m)^{n-1} + (1-q^n-npq^{n-1})^m > 1.$$

Ответ:

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$(1-q^n-npq^{n-1})^m > (1-(1-p^m)^n) - np^m(1-p^m)^{n-1}.$$

Рассмотрим таблицу $m \times n$, в каждой клетке которой будем писать 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью q. Тогда величина в левой части неравенства это вероятность того, что в каждой строке нашей таблицы хотя бы два раза записаны 1. А величина в правой части это вероятность того, что хотя бы два столбца таблицы полностью состоят из 1. Легко понять, что левое событие не менее вероятно. При $n > 2$ неравенство строгое.

□

Задача 10. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, для которых

$$f(x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

при всех положительных x.

Ответ: $f(x) = C$.

Решение. Заметим, что $g(x) = \frac{2x}{1+x^2} = g\left(\frac{1}{x}\right)$ для любого положительного x. Тогда $f(x) = f(g(x)) = f\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ для любого положительного x. Но заметим также, что тогда $g(g(\ldots g(x)\ldots))$ стремится к 1 для любого $x \in (0;1)$ $(x < g(x) < 1$, при этом если разность между x и 1 обозначить Δx, то после итерации новая разность будет $1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(\Delta x)^2}{1+x^2}$, то есть оценивается убывающей геометрической прогрессией, а значит к нулю сходится.). А значит $f(x) = f(1)$ на этом интервале из-за непрерывности. В силу доказанного выше константа продолжается и на остальную область.

□