Устная командная олимпиада по математике, 10-11 класс, 2024 год

Задача 1. На столе лежит в ряд 2024 карточки красной стороной вверх, синей стороной вниз. Двое по очереди делают ходы. За ход разрешается выбрать 50 последовательных карточек, самая левая из которых лежит красной стороной вверх и перевернуть их. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков сможет гарантированно победить?

Ответ: Второй.

Решение.

Заметим, что если закодировать красный цвет 1, а синий – 0, то получается, что мы каждым ходом должны уменьшать число на доске, а такое не может продолжаться бесконечно, поэтому игра закончится.

Выделим 40 карточек, которые лежали на позициях с номерами, кратными 50. Каждым ходом меняется состояние ровно одной из этих карточек, а значит перед ходом второго всегда нечетное количество таких красных карт. Следовательно, второй всегда сможет сделать ход. Тогда он победит.

□

Шорт-лист международной олимпиады, 2009

Задача 2. Пусть G – простой граф на n вершинах, имеющий более $\dfrac{n(k-1)}{2}$ ребер. Докажите, что G имеет путь длины k.

Решение. Легко убедиться, что при $k=1$ можно выбрать какое-то ребро. Пусть $k=2$. Тогда в нашем графе на n вершинах есть больше $\dfrac{n}{2}$ ребер, а значит какие-то два имеют общую вершину. В дальнейшем будем считать, что $k \geqslant 3$. Заметим также, что в любой момент граф можно считать связным. В противном случае можно выбрать компоненту, в которой неравенство на ребра будет выполнятся в силу линейности, и свести все к меньшему числу вершин.

Зафиксируем k. Докажем утверждение задачи с помощью индукции по n. База при $n=2$ очевидна. Докажем индукционный переход. Пусть для n вершин мы доказали утверждение для всех таких графов, удовлетворяющих условию. Рассмотрим граф на $n+1$ вершине. Если найдется вершина с маленьким количеством ребер (а именно менее $\dfrac{k+1}{2}$), то можно ее отбросить и применить предположение индукции. Тогда можно считать, что каждая вершина имеет степень хотя бы $\dfrac{k+1}{2}$.

Выберем самый длинный путь $v_0v_1...v_t$ в этом графе. С учетом рассмотренного ранее можно считать, что $t \geqslant 2$. Первая ситуация: v_0 и v_t соединены ребром. Вспомним про связность и заметим, что если есть еще вершины, то от нашего цикла $v_0v_1...v_t$ должно быть ребро к ним, а тогда можно построить более длинный путь. Тогда $t=n$. Но тогда естественная оценка на суммарное число ребер $\dfrac{t(t+1)}{2} > \dfrac{(t+1)(k-1)}{2}$ эквивалентно $t \geqslant k$, а это значит, что есть путь длины k.

Вторая ситуация: между v_0 и v_t нет ребра. Рассмотрим вершину v_0. В силу выбора максимального пути ее соседи могут быть только среди v_1, ..., v_{t-1}. С другой стороны у каждой вершины степень хотя бы $\dfrac{k+1}{2}$. Тогда среди внутренних вершин пути v_2, ..., v_{t-1} у нее не менее $\dfrac{k-1}{2}$ соседей. Рассмотрим какую-то из этих вершин v_r. Если она соседствует с v_0, то v_{r-1} не будет соседствовать с v_t, поскольку в этом случае можно построить цикл $v_rv_0v_1v_2...v_{r-1}v_tv_{t-1}...v_{r+1}$ и свести все к первому случаю. Следовательно, у вершины v_t в этом пути соседей не более $(t-2-\dfrac{k-1}{2})+1$. Получаем оценку $\dfrac{k+1}{2} \leqslant d(v_t) \leqslant (t-2-\dfrac{k-1}{2})+1$, а значит $t \geqslant k$, поэтому нужный путь найдется.

□

Форум Art of solving problems

Задача 3. Последовательность a_i задана условием $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$ для всех натуральных n. Докажите, что сумма всех величин, обратных первым 2025 членам последовательности, лежит в интервале $\left(1-\dfrac{1}{2024^{2024}};1\right)$.

Решение. Заметим, что $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n}$. Тогда $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_{2024}}=\left(\dfrac{1}{a_1-1}-\dfrac{1}{a_2-1}\right)+\left(\dfrac{1}{a_2-1}-\dfrac{1}{a_3-1}\right)+...+\left(\dfrac{1}{a_{2024}-1}-\dfrac{1}{a_{2025}-1}\right)=1-\dfrac{1}{a_{2025}-1}$. При этом понятно, что наша последовательность монотонно возрастает ($a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2>0$ при всех n). А значит верхняя оценка выполнена. Для доказательства нижней оценки проверим, что $a_{n+1}=a_na_{n-1}...a_1+1>n^n$. Действительно, $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1=a_n(a_{n-1}...a_1+1)-a_n+1=a_n...a_1+1$. Неравенство же тоже доказывается по индукции: $n^{2n}>(n+1)^{n+1}$ при $n \geqslant 3$.

□

Из книги «Mathematical Olympiad in China Problems and Solutions», Xiong Bin, Lee Peng Yee

Задача 4. Пусть A – подмножество натуральных чисел, обладающее 2 свойствами:

1) Если a принадлежит A, то все делители a тоже принадлежат A;

2) Если a и b $(1 < a < b)$ принадлежат A, то $1 + ab$ тоже A;

Докажите, что если A содержит хотя бы 2 натуральных числа, больших 1, то A содержит все натуральные числа.

Решение. Докажем в 4 этапа: 1) 2 лежит в A, 2) 3 лежит в A, 3) все нечетные в A, 4) все в A.

1). Есть $a, b > 1$, если среди них есть четное – 2 лежит как делитель, если нет – тогда $1 + ab$ – четное.

2). Итак, есть 2 и $a > 2$. Если a делится на 3 – 3 лежит. Если a вида $3k + 1$ – $2a+1$ делится на 3. Иначе смотрим на числа $2a+1 = 2(a+1)-1$, $2(2a+1)+1 = 2^2(a + 1) - 1$, $\ldots 2^m(a + 1) - 1$. Если хоть одно из них не простое – то у него есть собственный делитель вида $3k + 2$ – поделили на него, частное вида $3k + 1$. А все эти числа не могут быть простыми, ибо первое делилось на a (было ему равно), и остатки по модулю повторяются периодично.

3). Из 2 и 3 соорудили $2\cdot 3+1 = 7, 2\cdot 7+1 = 15, \ldots 2^k-1$. Надо объяснять, почему любое нечетное число – делитель одного из членов этой последовательности? Например, по теореме Эйлера.

4). Тут уже как угодно. Если надо получить четное n, можно рассмотреть делитель $(n + 1)(n - 1) + 1$.

□

Предложил Г.Челноков

Задача 5. Дан многочлен $P(x) = a_d x^d + \ldots + a_2 x^2 + a_0$ с натуральными коэффициентами и степенью $d \geqslant 2$. Определим последовательность $b_1 = a_0, b_{n+1} = P(b_n)$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что при любом $n \geqslant 2$ существует простое p такое, что p делит b_n, но не делит $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$.

Решение. Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда каждый простой делитель b_n входит в разложение $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$. Заметим, что $b_n = P(b_{n-1}) > b_{n-1}^2 > b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_1$. Это значит, что найдется простое p, которое входит в b_n в большей степени, нежели в произведение в левой части. Выберем наименьшее натуральное k, для которого b_k делится на p. Фундаментальный факт: если m не делится на k, то b_m не делится на p, а если делится, то степень вхождения p в b_k и b_m одинаковы. Давайте этот факт докажем. Пусть степень вхождения p в b_k равна α. Тогда $b_{k+1} = P(b_k)$ дает такой же остаток при делении на $p^{2\alpha}$, что и a_0. $b_{k+2} = P(P(b_k))$ дает такой же остаток при делении на $p^{2\alpha}$, что и $P(a_0)$ и т.д. Тогда до индекса $2k$ мы будем получать, что соответствующие b_{k+1}, b_{k+2}, ..., b_{2k-1} дают такие же остатки, как и b_1, b_2, ..., b_{k-1}, а значит не делятся на p. Для индекса $2k$ остаток при делении на $p^{2\alpha}$ такой же, как у b_k, означает, что степень вхождения такая же. Для остальных индексов рассуждение аналогично. Вернемся теперь к исходному рассуждению. Каждое простое p из разложения b_n входит в какое-то b_i с меньшим номером, однако мы выяснили, что тогда их степени вхождения должны совпадать. А это противоречит тому, что нашлось простое p, которое в b_n входит в большей степени, нежели в произведение $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$.

□

Болгария, 2018

Задача 6. В треугольнике ABC все стороны выражаются целыми числами. Вписанная окружность треугольника касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Оказалось, что $|AD^2 - BE^2| \leqslant 2$. Верно ли, что треугольник ABC обязательно равнобедренный?

Ответ: Да, верно.

Решение.

Обозначим стороны треугольника $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Имеем $CE = CD = \dfrac{a+b-c}{2}$. Запишем теоремы косинусов вокруг угла C для треугольников ABC, ADC и BEC. Из первого треугольника имеем $cosC = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Из двух оставшихся $AD^2 = b^2 + \dfrac{(a+b-c)^2}{4} - b(a+b-c)cosC$ и $BE^2 = a^2 + \dfrac{(a+b-c)^2}{4} - a(a+b-c)cosC$. Тогда имеем

$$BE^2 - AD^2 = \frac{a-b}{2ab}(a^2(-a+b+c) + b^2(a-b+c) + c^2(a+b-c)).$$

Пусть треугольник не является равнобедренным. Тогда можно считать, что $a > b$. Так как стороны целые, то $c > 1$, чтобы выполнялось неравенство треугольника. А значит $c \geqslant 2$. Обозначим k разницу $a - b$. Если $k \geqslant 2$, то выразим a как $b + k$ в исходном выражении разности $BE^2 - AD^2$ и получим оценку $\dfrac{k}{2(b+k)b}\big((b+k)^2(c-k) + b^2(c+k) + c^2(2b+k-c)\big) \geqslant \dfrac{2((b+k)^2+b^2)}{2(b+k)b} > 2$.

При $k = 1$ нужно воспользоваться оценкой разность квадратов из условия переписывается в виде $\dfrac{1}{2(b+1)b}\big((b+1)^2(c-1) + b^2(c+1) + c^2(2b+1-c)\big)$. Заметим, что $2 \leqslant c \leqslant a + b - 1 = 2b$, а также что минимум $f(c) = c^2(2b+1-c)$ на отрезке $[2; 2b]$ достигается в левом конце. Следовательно, он равен $f(2) = 8b-4$. Получаем оценку $\dfrac{1}{2(b+1)b}\big((b+1)^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 3 + 8b - 4\big) = 2 + \dfrac{4b^2+10b-3}{2b^2+2b} > 2$.

□

Журнал Crux, 2007, №1

Задача 7. Точка I – центр вписанной окружности ABC. Основания перпендикуляров, опущенных из точки I на стороны BC, CA и AB это D, E и F соответственно. Пусть K – точка, симметричная D относительно AI, а L – вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников BFK и CEK. Оказалось, что $\frac{1}{3}BC = AC - AB$. Какие значения может принимать $\frac{DE}{KL}$?

Ответ: 2.

Решение.

Равенство из условия можно переписать в виде $CD = 2 \cdot BD$. Очевидно, что точка K лежит на вписанной окружности. Пусть касательная к вписанной окружности ABC в точке K пересекает стороны AC, AB или их продолжения в точках X, Y соответственно. Тогда B и X – середины отрезков FY и EC соответственно. Действительно, в силу симметрии относительно биссектрисы угла A $FY = CE = CD = 2BD = 2BF$ и $2XE = 2KX = 2BD = CD = CE$. Пусть W – середина отрезка KY, тогда $KWBF$ – равнобедренная трапеция, так как треугольник KYF является равнобедренным. Пусть Z симметрична точке K относительно точки X, тогда $EKCZ$ прямоугольник. Два рассмотренных четырехугольника вписаны в соответствующие окружности из условия. Давайте воспользуемся этим. Имеем $XL = XK = YB = YW$, что означает что L симметрична B относительно серединного перпендикуляра к WK (окружность $FBWKL$ симметрична относительно этого серединного перпендикуляра и точки Y и Z тоже, а от последних проведены отрезки равной длины к B и L). Получаем, что $KL = BW = \frac{FK}{2} = \frac{DE}{2}$. Отсюда $\frac{DE}{KL} = 2$.

□

Шорт-лист Балканской олимпиады, 2021

Задача 8. Некоторое множество на плоскости покрыто несколькими открытыми кругами. При каком минимальном k можно гарантированно выбрать несколько не пересекающихся кругов и раздуть в k раз так, что множество будет покрыто новыми кругами?

Ответ: 3.

Решение.

Покажем, что меньше 3 нельзя. Рассмотрим два единичных круга, которые зацеплены на ϵ. Легко видеть, что выбрать из них можно лишь один круг, а раздуть его придется в $3 - \epsilon$ раз. Ясно, что какое бы меньшее 3 число мы не взяли, то можно так подобрать ϵ, чтобы у нас не получилось.

Покажем, что для $k = 3$ это возможно. Выберем самый большой круг, затем самый большой из тех, что не пересекается с предыдущим, потом самый большой, который не пересекается с ранее выбранными и т.д. Посмотрим, что произойдет после раздувания выбранных кругов. Рассмотрим круг U, который мы не выбрали, пересекается с кем-то из выбранных. Выберем самый большой круг S из тех, с кем U пересекся. В силу выбора U не более, чем S, а значит при увеличении радиуса S в 3 раза круг U будет накрыт.

□

Putnam, 1998, вариация

Задача 9. Пусть n – натуральное число и $\mathcal{A}$ – семейство непустых подмножеств $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что если $A \in \mathcal{A}$ и A подмножество $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, то B тоже принадлежит $\mathcal{A}$. Докажите, что

$$f(x) := \sum_{A \in \mathcal{A}} x^{|A|}(1-x)^{n-|A|}$$

не убывает при $x \in (0, 1)$.

Решение. Для наглядности введем вероятностную интерпретацию сюжета этой задачи: рассмотрим n независимых случайных функций f_i (вестимо, при $i \in [1..n]$), каждая принимает значение 1 с вероятностью x, и 0 с вероятностью $1 - x$, и независима от всех остальных. Тогда вероятность получить произвольное двоичное слово u в качестве вектора значений $(f_1, \ldots, f_n)$ есть $x^k(1-x)^{n-k}$ где k – число единиц в слове u, это утверждение – в точности условие независимости случайных функций. (вообще-то, текст выше нестрог. Формально, порядок построения обратный: рассматриваем n функций, объявляем элементарным случайным событием то, что они приняли такой-то набор значений, говорим, что вероятность этого события – такая как написано выше, тогда эти функции независимы по определению независимости). Те, кого смущает вероятностный язык, могут считать, что мы взяли в n-мерном пространстве единичный куб $[0, 1]^n$, и разрезали его n гиперплоскостями $z_i = x$ (для каждого i взята своя гиперплоскость) на 2^n параллелепипедов, выше посчитаны их объемы.

Теперь на введенном языке надо как-то научится говорить про последний объект из условия задачи: $\mathcal{A}$. Это какое-то событие (объединение элементарных событий), обладающее свойством: если элементарное событие A принадежит $\mathcal{A}$, то любое элементарное событие B, получающееся из A заменой некоторых нулей на единицы, тоже принадлежит $\mathcal{A}$. Тем, кто следит за нитью повествования на языке параллелепипедов, рекомендуем в этом месте в последниц раз перевести наши слова на свой язык (что де $\mathcal{A}$ – это такое множество параллелепипедов, что...), убедится что разницы никакой, и дальше уже забыть о разнице в диалектах.

Итак, нас просят доказать, что вероятность $\mathcal{A}$ есть не убывающая функция от x. Для этого обобщим задачу! Раньше у нас все функции f_i для разных i принимали значение 1 с одной и той же вероятностью x, теперь пусть каждая принимает 1 с собственной вероятностью x_i. Докажем, что вероятность события $\mathcal{A}$ монотонння растет по каждой из переменных x_i. Зафиксируем произвольное i, тогда наборы значений $n-1$ случайных функций (всех кроме i-й) разбились на три типа: $\mathcal{B}$ – когда на остальных функциях выпал такой вектор значений, что элементарное событие лежит в $\mathcal{A}$ вне зависимости от того, что выпало на i-й функции; – когда на остальных функциях выпал такой вектор значений, что элементарное событие лежит в $\mathcal{A}$ только если на i-й функции выпала 1; $\mathcal{D}$ – когда на остальных функциях выпал такой вектор значений, что элементарное событие не лежит в $\mathcal{A}$ вне зависимости от того, что выпало на i-й функции. Заметьте, нет четвертого варианта: «на остальных функциях выпал такой вектор значений, что элементарное событие лежит в $\mathcal{A}$ только если на i-й функции выпала 0» – это гарантируется условием о монотонности $\mathcal{A}$ (собственно, единственным, что условие задачи сообщает про $\mathcal{A}$). Отлично, значит можем выразить вероятность $\mathcal{A}$, воспользовавшись тем, что случайная функция f_i независима от остальных функций, а значит и определенных через них событий $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$.

$$p(\mathcal{A}) = \mathcal{B} + x_i p(\mathcal{C})$$

(здесь $p(\mathcal{A})$ означает вероятность $\mathcal{A}$). А эта функция не убывает, потому что линейна с неотрицателльным коэффициентом.

□

Предложил Г.Челноков

Задача 10. Непрерывная функция $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ принимает одинаковое значение во всех целых неотрицательных точках. Для любых чисел $0 \leqslant a < b < c < d$, удовлетворяющих условию $f(a) = f(c)$ и $f(b) = f(d)$ выполнено $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f\left(\dfrac{c+d}{2}\right)$. Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно постоянная?

Ответ: да, верно.

Решение.

Сначала заметим, что не умаляя общности можно считать, что $f(k) = 0$ для целых неотрицательных k. Рассмотрим полуцелую точку t. Несложно подобрать такие упорядоченные целые a, b, c и d, что $\dfrac{a+b}{2} = t$, а $\dfrac{c+d}{2}$ – целое. Таким образом значение во всех полуцелых точках тоже 0. Теперь сделаем гомотетию прямой с коэффициентом 2 и применим аналогичное рассуждение. Таким образом мы получим нули во всех двоично-рациональных числах. Значние функции в любой точке можно приблизить такими числами, а значит функция везде принимает нулевое значение.

□

Румыния, 2019