

Устная командная олимпиада по математике, 8-9 класс, 2025

Задача 1. Докажите для положительных чисел a, b, c, d неравенство

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + cd + d^2} + \frac{d^3}{d^2 + da + a^2} \geq \frac{a + b + c + d}{3}.$$

(Фольклор)

Решение. Заметим, что $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b$. Действительно: $3a^3 \geq (a^2 + ab + b^2)(2a - b) \iff a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \iff (a + b)(a - b)^2 \geq 0$. Остается сложить все такие оценки.

□

Задача 2. Даны натуральные числа $a_0 < a_1 < \dots < a_n \leq 2^n$. Найдите максимальное значение суммы чисел, обратных НОКа каждой пары (a_i, a_{i+1}) при $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

(Вариация задачи из книги «104 Number theory problems» Titu Andreescu)

Ответ: $1 - \frac{1}{2^n}$.

Решение. Пример на заданный ответ – набор чисел $2^0, 2^1, \dots, 2^n$. Тогда сумма чисел, обратных НОКа, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Оценка: Заметим, что если $b > a$, то $\frac{1}{[a, b]} = \frac{(a, b)}{ab} \leq \frac{b - a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Остается сложить такие оценки по нашим i и получить $1 - \frac{1}{2^n}$.

□

Задача 3. При каких натуральных n существуют целые числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, не все равные, для которых

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n^2 = 0 \end{cases}$$

?

(Бразилия, 2023)

Ответ: При таких n , что $2n - 1$ не простое.

Решение. Если n удовлетворяет условию, то можно представить $(2n - 1) = (2m - 1)(2k - 1)$, где m и $k > 1$. Есть решение $x_1 = x_2 = \dots = x_{mk} = 1 - m$, $x_{mk+1} = \dots = x_n = m$.

Пусть $2n - 1 = p$. Тогда заметим, что $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_i - x_i^2$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Однако уравнение $a - a^2 = b - b^2$ эквивалентно $(a - b)(a + b - 1) = 0$. Это значит, что наши числа либо равны, либо дополняют друг друга до 1. Тогда их можно разбить на группы вида t и $1 - t$. Не умаляя общности можно считать, что первые s чисел это первая группа. Тогда $t - t^2 = st + (n - s)(1 - t)$. Тогда $t^2 + (2s - n - 1)t + n - s = 0$. $D = (2s - n - 1)^2 - 4(n - s) = (2s - n)^2 - (2n - 1) = A^2$. Если $2n - 1 = p$, то $(2s - n - A)(2s - n + A) = p$. Тогда $(2s - n - A) = \pm 1(2s - n + A) = \pm p$, $p = 2n - 1 = 2(2s - n) \pm 1$. Отсюда $s = n$, тогда все равны, либо $4n = 4s - 2$, что невозможно.

□

Задача 4. При каких целых неотрицательных m число $(2^{2m+1})^2 + 1$ имеет не более двух различных простых делителей?

(Из книги «Number Theory Structures, Examples, and Problems» Titu Andreescu)

Ответ: $m = 0, 1, 2$.

Решение. Легко видеть, что числа 5, 65, $1025 = 5^2 \cdot 41$ подходят.

Если $m \geq 3$, то $(2^{2m+1})^2 + 1 = (2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1)(2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1)$. Скобки отличаются на 2^{m+2} , а потому взаимно просты. Следовательно, каждая из скобок является степенью простого числа. При этом заметим, что $(2^{2m+1})^2 + 1$ делится на 5, а значит и одна из скобок это степень пятёрки. То есть $2^{2m+1} \pm 2^{m+1} + 1 = 5^k$. По модулю 8 левая часть дает остаток 1, а значит k четно, то есть можно переписать в виде $k = 2l$. Отсюда $2^{m+1}(2^m \pm 1) = (5^l - 1)(5^l + 1)$. Но вторая скобка сравнима с 2 по модулю 4, следовательно в разложении содержит двойку только в первой степени, поэтому $(5^l - 1) = 2^m(2t - 1)$. Если $t = 1$, то $2 = (5^l + 1) - (5^l - 1) = 2(2^m \pm 1) - 2^m = 2^m \pm 2 \geq 2^3 - 2$, что невозможно. Если $t \geq 2$, то $5^l - 1 \geq 3 \cdot 2^m$, однако для второй скобки $5^l + 1 \leq 2(2^m \pm 1)$, что невозможно.

□

Задача 5. Дано простое число p . Петя и Вася по очереди (начинает Петя) вписывают цифры в свободные клетки полоски $1 \times p$. Петя побеждает, если полученное число (возможно, с ведущими нулями) делится на p , а Вася хочет ему помешать. Кто выигрывает при правильной игре?

(Шорт-лист, 2017)

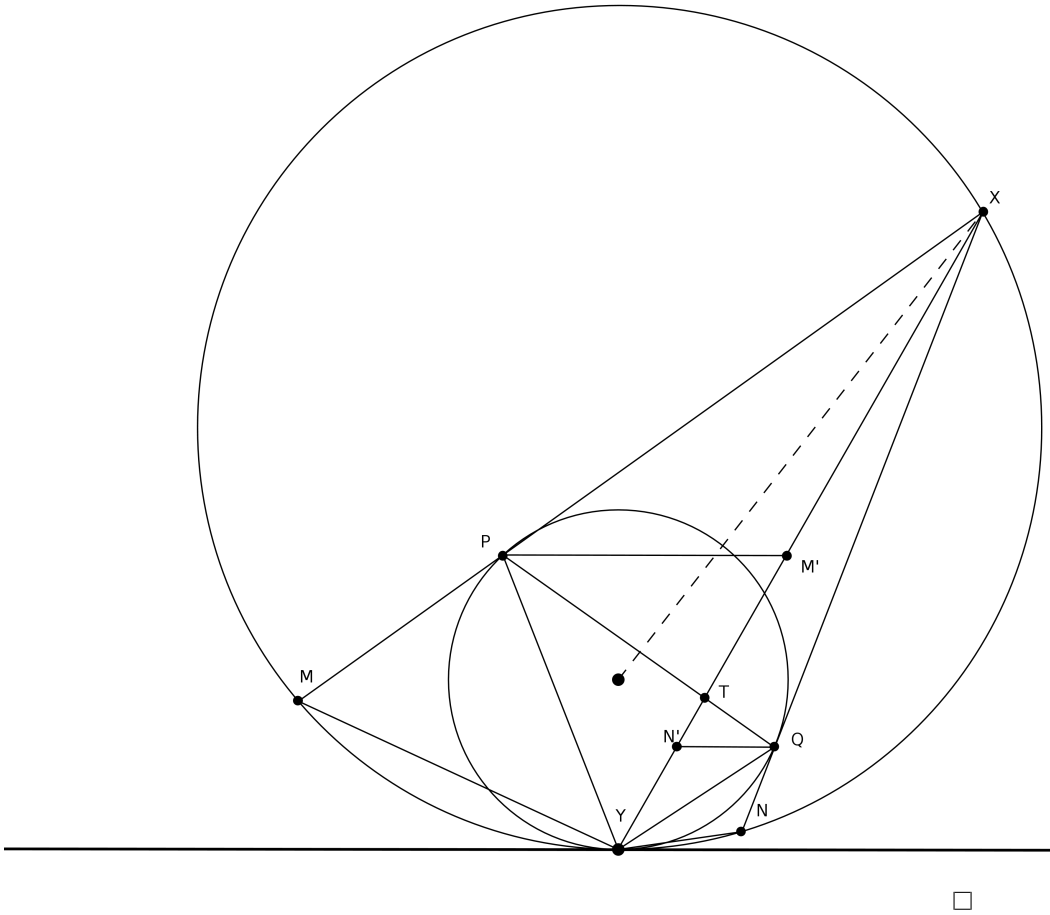
Ответ: Петя.

Решение.

Для $p = 2$ или $p = 5$ достаточно написать 0 последней цифрой. Для остальных простых p впишем на первую позицию 0. По МТФ $(10^{\frac{p-1}{2}})^2 = 10^{p-1} \equiv 1(mod p)$. Тогда $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(mod p)$ или $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(mod p)$. Разобьем оставшиеся разряды на пары с разницей номеров $\frac{p-1}{2}$. В первом случае на ход Васи цифрой x мы ходим в парный разряд цифрой $9-x$. Тогда суммарный вклад будет делиться на p по МТФ. Во втором случае на ход Васи цифрой x мы ходим в парный разряд тоже цифрой x . Таким образом в каждой паре суммарный вклад делится на p . □

Задача 6. Две окружности касаются внутренним образом. На большей окружности выбрали точку X и провели хорды XM и XN , которые касаются меньшей окружности в точках P и Q соответственно. Докажите, что $MP + NQ \geq PQ$.
(Предложил А.Пешнин)

Решение. Не умаляя общности будем считать, что точка касания окружностей лежит снизу, а точка X лежит в правой полуплоскости. Пусть точка касания окружностей Y . Заметим, что по лемме Архимеда YM и YN – биссектрисы углов MYX и NYX . Отразим точки M и N относительно этих биссектрис. Тогда новые точки M' и N' упадут на XY , а отрезки PM и QN перейдут в параллельные из-за вписанности четырехугольника $XMYN$. Теперь достаточно проверить неравенство между углами QTN' и $QN'T$, остальное будет следовать из подобия и того факта, что против большего угла лежит большая сторона. Заметим, что общая касательная окружностей параллельна отрезкам PM' и QN' (Угол между касательной в точке Y и хордой YQ равен сумме углов QYX и QXY , которая в свою очередь равна углу YQN и углу YQN'). Тогда ясно, что отрезок QN' при продолжении будет вместе с касательной отсекал от меньшей окружности равные дуги (Точка Y будет серединой). А дуга PQ будет делиться не поровну, поскольку поровну дугу поделит пунктирный луч до центра окружности, а луч XY в наших предположениях пойдет ниже (направление на Y пойдет ниже, чем направление на центр меньшей окружности). Тогда если сравнивать углы QTN' и $QN'T$ и разложить их в полусуммы дуг на меньшей окружности, то первые слагаемые будут равные, а для вторых будет искомое неравенство.



Задача 7. В выпуклом четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями отметили проекции середин сторон на противоположные стороны. Докажите, что полученные четыре точки лежат на одной окружности.
(Вариация сюжета об окружности 8 точек.)

Решение. Рассмотрим параллелограмм Вариньона этого четырехугольника. Он в таком четырехугольнике является прямоугольником. Заметим, что проекция середины стороны на противоположную смотрит на диагональ этого прямоугольника под прямым углом. Следовательно все такие точки лежат на описанной окружности прямоугольника. □

Задача 8. Вера рисует картину внутри квадрата 1×1 . Она хочет закрасить

несколько непересекающихся квадратов суммарной площади S со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата. При каком наибольшем значении S любой конечный набор квадратов с суммарной площадью S Вера сможет нарисовать?

(Журнал CRUX, 2004 №4, вариация)

Ответ: $S = \frac{1}{2}$

Решение. Пусть значение $S > \frac{1}{2}$, тогда можно взять два равных квадрата площади более $\frac{1}{4}$, каждый из них содержит центр.

Упорядочим квадраты по убыванию и будем последовательно их выкладывать в ряд по нижней стороне, пока можем. Если очередной квадрат «выпирает», то проведем линию по верхней стороне первого квадрата и продолжим уже по ней аналогичный процесс. И так далее. Рассмотрим высоты самых левых квадратов. Пусть их сумма равна h . Докажем, что $h \leq 1$. Площадь всех квадратов можно оценить как $x^2 + (1-x)(h-x)$ (первый квадрат $x \times x$, а дальше мы можем использовать то, что первый квадрат в каждом слое это тот, который не влез на предыдущий). С другой стороны сумма площадей квадратов равна $\frac{1}{2}$. Получим оценку $h \leq \frac{\frac{1}{2} - x^2}{1-x} + x$. Но $\frac{\frac{1}{2} - x^2}{1-x} + x \leq 1$, значит все уместится.

□

Задача 9. Пусть m и n — натуральные числа. Некоторые клетки доски размером $m \times n$ окрашены в красный цвет. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{2r}$ из $2r \geq 4$ попарно различных красных клеток называется циклом слона, если для каждого $k \in \{1, \dots, 2r\}$ клетки a_k и a_{k+1} лежат на диагонали, но клетки a_k и a_{k+2} не лежат на диагонали (полагаем $a_{2r+1} = a_1$ и $a_{2r+2} = a_2$).

Определите максимально возможное количество красных клеток на доске размером $m \times n$ без цикла слона.

(МЕМО-2021)

Ответ: Для полосы $1 \times k$ или $k \times 1 - k$, для доски $m \times n - 2m + 2n - 4$.

Решение. В случае полосы можно закрасить все клетки. Пусть каждая сторона доски не менее 2. В качестве примера можно закрасить два первых столбца, а также первую и последнюю строки. При попытке построить цикл мы уйдем вправо.

Обозначим ячейку в i -й строке и j -м столбце как (i, j) . k -я положительная диагональ — это множество ячеек (i, j) , такое, что $i + j - 1 = k$. Аналогично, k -я отрицательная диагональ — это множество ячеек (i, j) , такое, что $n + i - j = k$. Рассмотрим двудольный граф G с долями $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{m+n-1}\}$ и $B =$

$\{b_1, b_2, \dots, b_{m+n-1}\}$, где вершины a_i и b_j соединены ребром тогда и только тогда, когда клетка в пересечении i -й положительной диагонали и j -й отрицательной диагонали красная. Заметим, что цикл слона соответствует циклу в G , и наоборот. Граф G имеет как минимум две компоненты: если мы раскрасим клетки таблицы попеременно в черный и белый цвета, как в шахматах, то рёбра графа G , соответствующие черным клеткам, лежат в другой компоненте, чем рёбра графа G , соответствующие белым клеткам — невозможно переместить слона между черной и белой клетками. Кроме того, граф G имеет $2n + 2m - 2$ вершины. Если граф G ациклический, то G — это лес, состоящий как минимум из двух деревьев. Следовательно, граф G содержит не более $2n + 2m - 2 - 2 = 2n + 2m - 4$ рёбер, а значит верна оценка и для красных клеток. □

Задача 10. Несколько натуральных чисел выписаны в строку. Каждым ходом разрешается выбрать пару чисел x и y таких что x лежит левее y и $x > y$ и заменить на пару $(x-1, x)$ или $(y+1, x)$. Существует ли такой изначальный набор чисел и последовательность операций, при которых процесс будет продолжаться бесконечно?

(Шорт-лист 2012)

Ответ: Нет.

Решение. Заметим, что максимальное число в при заданных операциях не меняется. Заметим также, что с точки зрения лексикографического порядка каждая следующая строка будет больше предыдущего. Но у нас лишь конечное количество строк с заданным максимальным элементом. Поэтому процесс будет конечным. □