Задача 1. Про положительные числа x, y, z, t известно, что они все больше 1, а также выполняются равенства:

$$\frac{x}{z} = \frac{y}{t} = \frac{xy+1}{zt+1}\ .$$

Докажите, что $x = z$ и $y = t$.

Решение. Пусть это не так. Тогда без ограничения общности будем считать, что

$$\frac{x}{z} = k > 1.$$

Тогда получается, что $x = kz$, $y = kt$. Выходит

$$k = \frac{xy+1}{zt+1} = \frac{k^2zt+1}{zt+1}.$$

$$kzt + k = k^2zt + 1.$$

$$(kzt-1)(k-1) = 0.$$

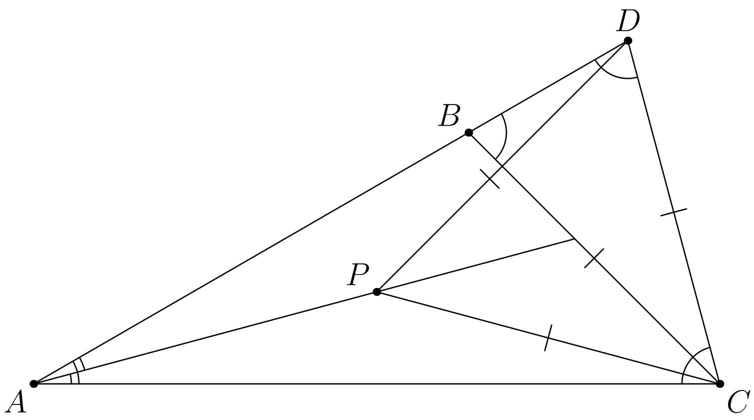
Но так как $kzt > 1$, то $k = 1$. □

Задача 2. На биссектрисе угла A треугольника ABC ($\angle A = 30^\circ, \angle B = 105^\circ$) отмечена точка P такая, что она лежит внутри треугольника и $PC = BC$. Найдите угол APC.

Ответ: 150°.

Решение. Отметим на луче AB точку D — симметричную точке C относительно биссектрисы AP. Из построения следует, что $PD = PC$ и $\angle ADC = \angle ACD = 75^\circ$. Но $\angle DBC = 75^\circ$ (это следует из условия), поэтому $BC = BD$.

Следовательно, треугольник PDC — равносторонний. И после легкого подсчета углов мы получаем, что $\angle APC = 150^\circ$.



□

Задача 3. На ребрах единичного куба отмечено восемь точек: $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Докажите, что для существуют $i, j = 1, \ldots, 8$ такие, что $i \neq j$ и $A_iA_j \leqslant 1$.

Решение. Будем доказывать более сильный факт, а именно, что расстояние по ребрам куба между какими-то двумя отмеченными точками не превосходит единицы.

Предположим, что это неверно, и расстояние между любыми двумя точками больше 1. Для каждой точки найдём ближайшую к ней вершину куба. Очевидно, что ближайшая вершина будет на расстоянии не более $1/2$. Отсюда следует, что для разных точек будут разные ближайшие вершины. Это значит, что для каждой вершины куба есть ровно одна точка, которая находится от неё на расстоянии не более $1/2$.

Найдём точку X, наиболее удалённого от своей ближайшей вершины A. Пусть точка X располагается на ребре AB, при этом $AX \leqslant 1/2$. Пусть Y — точка, для которой ближайшая вершина — B. Получается, что $AX \geqslant BY$, поэтому $BX+BY = (1-AX)+BY \leqslant 1$. То есть расстояние между точками X и Y не более единицы. Противоречие. □

Задача 4. Найдите наибольшее натуральное n такое, что разность двух его делителей может принимать любое натуральное значение от 1 до $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Ответ: 24.

Решение. Это число удовлетворяется условию, так как

$$1 = 2-1; \quad 2 = 4-2; \quad 3 = 6-3;$$

$$4 = 6-2; \quad 5 = 8-3; \quad 6 = 12-6;$$

$$7 = 8-1; \quad 8 = 12-4; \quad 9 = 12-3;$$

$$10 = 12-2; \quad 11 = 12-1; \quad 12 = 24-12.$$

Предположим, что $n > 24$ удовлетворяет условию. Если n — нечетно, то у него нет делителей между n и $\frac{n}{3}$. Таким образом число $\frac{n-1}{2}$ выражается следующим образом

$$\frac{n-1}{2} = n - \frac{n+1}{2}.$$

Но $\frac{n+1}{2}$ не является делителем n. Противоречие.

Тогда n — четно. Пусть $\frac{n}{3} \leqslant k < \frac{n}{2}$ и $k = d_1 - d_2$. Тогда $d_1 = \frac{n}{2}$. Поэтому для всех таких k число $\frac{n}{2} - k$ является делителем n. То есть n делится на все числа, не превосходящие $\frac{n}{6}$, то есть на 3 и на 4 (так как $n > 24$). Таким образом, мы получили, что $n \,\vdots\, 12$.

Теперь осталось сделать последнюю оценку. Числа $\frac{n}{6}$ и $\frac{n}{6} - 1$ взаимно просты и делят n. Таким образом получается неравенство

$$n \geqslant \frac{n}{6}\left(\frac{n}{6} - 1\right);$$

$$n \leqslant 42.$$

Но в этом промежутке есть только одно число, которое делится на 12 и больше 24 — это 36. Но оно не удовлетворяет условию задачи, так как $5 < \frac{36}{6}$ и не является делителем 36. □

Задача 5. Докажите, что существует по крайней мере 100! способов разбить число 100! на сумму слагаемых из множества $\{1!, 2!, 3!, \ldots, 99!\}$. Разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются одинаковыми; любое слагаемое можно использовать несколько раз.

Решение. Докажем индукцией, что для всех $n \geqslant 4$ есть хотя бы $n!$ способов разбить число $n!$ на слагаемые из $\{1!, 2!, \ldots, (n-1)!\}$.

Для $n = 4$ если использовать только слагаемые $1!$, $2!$ есть 13 способов разбить $4!$, так как $2!$ можно использовать от 0 до 12 раз. Если $3!$ используется 1 раз, то $4! - 3! = 18$ можно разбить с $1!, 2!$ слагаемыми 10 способами. Ещё хотя бы одно разбиение можно получить если использовать $3!$ два раза. Тогда получим хотя бы 24 необходимых разбиения.

Предположим теперь, что утверждение верно для n и докажем его для $n + 1$. Чтобы разбить $(n + 1)!$, слагаемое $n!$ можно использовать i раз для $0 \leqslant i \leqslant n$. По предположению, для каждого такого i, оставшееся число $(n+1)! - i \cdot n! = (n+1-i) \cdot n!$ можно разбить на слагаемые $\{1!, \ldots, (n-1)!\}$ по крайней мере $n!$ способами следующим образом. Для каждого разбиения $n!$, слагаемое, встречающееся скажем k раз, перепишем $(n+1-i)k$ раз. Таким образом, получим по крайней мере $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ способов разбить число $(n + 1)!$ как и требовалось. Исходная задача следует для $n = 100$. $\square$

Задача 6. Женя выставляет на шахматную доску фигуры по следующему правилу: фигуру можно поставить только в пустую клетку, которая граничит по стороне хотя бы с тремя пустыми клетками. Какое наибольшее количество фигур сможет поставить Женя?

Ответ: 36.

Решение. Предположим, мы смогли выставить 37 фигур. Когда мы выставляем фигуру в некоторую клетку, у этой клетки есть как минимум 3 соседних свободных клетки. Закрасим все границы между этими клетками в зелёный цвет. Таким образом, каждый раз мы закрашиваем хотя бы 3 отрезка. А после выставления 37 фигур мы закрасим зелёным как минимум 111 отрезков.

Заметим, что каждый отрезок границ между клетками покрашен не более, чем единожды, а так как этих отрезков всего $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$, то не покрашен всего лишь один отрезок.

Далее, в угловых клетках фигура не может появиться, потому что у них всего два соседа. Любая неугловая фигура, примыкающая к стороне квадрата, имеет всего три соседа, поэтому когда в ней появляется фигура, все её соседи свободны. В частности, отсюда следует, что фишки не могут появиться в двух соседних клетках на границе.

Таким образом, у каждой стороны квадрата будет не больше трёх клеток с фигурами. Поэтому будет закрашено зелёным не более 6 из 7 отрезков границ в этой линии, то есть непокрашенных отрезков хотя бы 4. Противоречие. Значит 37 фигур выставить нельзя.

Пример для 36 (числа — это порядок выставления фигур на доску).

	14		21		22		
1		13		35	23	36	
	15	12	20		24		6
2		11		33	25	34	
	16	10	19		26		5
3		9		31	27	32	
	17	8	18		28		4
		7		29		30	

$\square$

Задача 7. Пусть x, y, z — длины сторон некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$(x+y)\sqrt{xy}+(x+z)\sqrt{xz}+(y+z)\sqrt{yz} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{2}.$$

Решение. Из неравенства о средних следует, что

$$(x+y)\sqrt{xy}+(x+z)\sqrt{xz}+(y+z)\sqrt{yz} \geqslant 2xy+2xz+2yz.$$

Тогда нам достаточно доказать неравенство

$$2xy+2xz+2yz \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{2}.$$

Раскрывая скобки, мы получаем

$$2xy+2xz+2yz \geqslant x^2+y^2+z^2.$$

Что является суммой трех неравенств, которые следуют из неравенств треугольника

$$x(y+z) \geqslant x^2;$$

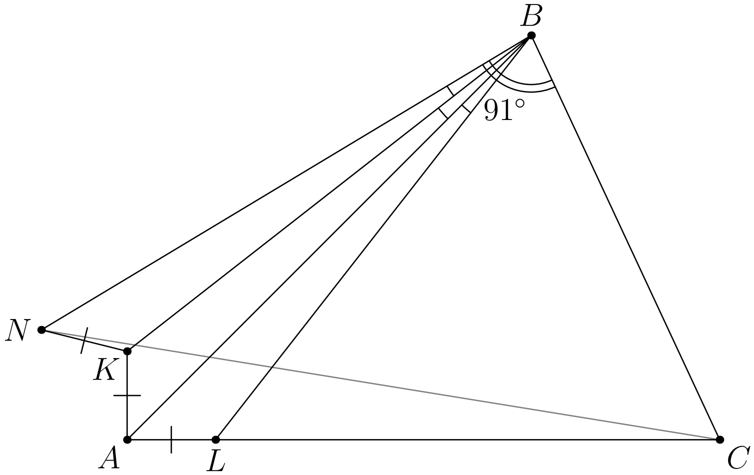
$$y(x+z) \geqslant y^2;$$

$$z(y+x) \geqslant z^2.$$

$\square$

Задача 8. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка L. Известно, что $\angle ABL = 7^\circ$, $\angle CBL = 70^\circ$. Докажите, что $AC + 2AL > BC$.

Решение. Пусть K — точка симметричная точке L относительно AB, а N — точка симметричная точке A относительно прямой BK. Заметим, что тогда $\angle NBC = 91^\circ$. Получается $BC < NC$, но при этом $NC < NK + KA + AC = 2AL + AC$.



□

Задача 9. Джинн решил построить бесконечную башню из бесконечного количества кирпичей. На каждом кирпиче он написал натуральное число так, что для любого натурального числа k ровно на k кирпичах написан какой-нибудь делитель k. Докажите, что любое натуральное число можно найти на хотя бы одном кирпиче.

Решение. Найдём, на скольких кирпичах написано число $k = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$.

Для этого найдём, на скольких кирпичах написаны делители числа k, меньшие k. Каждый такой делитель является делителем одного из чисел

$$\frac{k}{p_1}, \frac{k}{p_2}, \ldots, \frac{k}{p_n}.$$

Обозначим через A_i множество кирпичей, на которых написан один из делителей числа $\dfrac{k}{p_i}$. Тогда искомое количество делителей равно

$$S = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| +$$

$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|,$$

где $|A|$ — количество элементов множества A.

При этом

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_l}| = \frac{k}{p_{i_1} p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_l}}.$$

Получается, что число k встречается $k - S$ раз, а это равно $\varphi(k)$ (функция Эйлера), что больше 1. □

Задача 10. Известно, что среди внешне неразличимых монет на столе ровно k фальшивых и n настоящих. Кроме того, известно, что все настоящие монеты весят одинаково, а все фальшивые тоже весят одинаково и меньше настоящих. Есть чашечные весы без гирек, при взвешивании на которых можно класть не более одной монеты на каждую чашу. Кроме того, весы всегда показывают неправильный результат (любой из двух по своему желанию). Какое наибольшее количество монет каждого типа можно гарантированно определить, если количество взвешиваний не ограничено?

Решение. Можно определить $|k - n|$ тех монет, которых больше. Без ограничения общности будем считать, что $n > k$. Покажем, как действовать весам. Пусть они выделят некоторые k настоящих монет $t_1, t_2, \ldots, t_k$, а так же пронумеруют фальшивые монеты f_1, f_2, $\ldots$, f_k. Назовём все эти монеты (и t_i, и f_i) множеством монет A.

Пусть весы при взвешивании любой монеты из множества A и любой оставшейся монеты, показывают, что монета из множества A тяжелее (это можно сделать, так как все остальные монеты настоящие). Далее, пусть при взвешиваниях монет f_i и t_j показывается равенство. Далее, расставим как-то результаты взвешиваний между фальшивыми монетами, и теперь между монетами t_i, t_j поставим такой же знак, как между f_i, f_j. Результаты взвешиваний между монетами не из множества A расставим как угодно. Теперь, зная лишь результаты взвешиваний, мы не можем определить, какие из монет фальшивые, потому что при замене множеств f_1, $\ldots$, f_k и t_1, $\ldots$, t_k друг на друга результаты всех взвешиваний остаются прежними. Таким образом, мы не можем однозначно определить ни одной фальшивой монеты, и не можем определить более $n - k$ настоящих монет.

Покажем, что $n - k$ настоящих монет можно определить при любых действиях весов. Покажем, что среди множества из $2k+1$ монеты всегда можно определить одну настоящую. Из этого будет следовать исходное утверждение, так как можно последовательно определять по одной настоящей монете, пока мы не определим $n-k$ настоящих монет.

Пусть теперь у нас есть какие-то $2k + 1$ монета. Взвесим их попарно. Если среди взвешиваний были какие-то равенства, отложим пары равных монет в сторону. Заметим, что среди каждой такой пары ровно одна настоящая монета, и ровно одна фальшивая. Теперь у нас осталось $2t + 1$ монета, причём среди результатов их взвешиваний нет ни одного равенства, при этом настоящих среди них хотя бы $t + 1$. Заметим, что найдётся какая-то монета, которая легче хотя бы t других монет по мнению весов. Эта монета не может быть фальшивой, поскольку фальшивая монета по мнению весов может быть легче только другой фальшивой, но их не более t. Таким образом, мы нашли настоящую монету. $\square$