Финал Московского турнира математических боёв. Лига 9А

Задача 1. Дана трапеция $ABCD$. Постройте отрезок, параллельный основаниям, концы которого лежат на боковых сторонах, а диагонали делят его на три равные части.

Задача 2. Десятизначное число, кратное 11111, все цифры которого различны, назовём *интересным*. Сколько существует интересных чисел?

Задача 3. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размером 8×8 клеток для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка?

Задача 4. На плоскости расположено несколько равных непересекающихся кругов. Верно ли, что их можно раскрасить в три цвета так, что никакие два одноцветных круга не касаются?

Задача 5. Наследство состоит из нескольких бриллиантов и оценивается в 1 000 000 долларов. Известно, что его можно разделить на 5, а можно и на 8 равных частей. Какую наибольшую стоимость может иметь самый маленький бриллиант?

Задача 6. Обозначим через a_n целое число, ближайшее к числу $\sqrt{n}$. Найдите сумму

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{2005}}.$$

Задача 7. Одна из двух окружностей радиуса R проходит через вершины A и B, а другая — через вершины B и C параллелограмма $ABCD$. Докажите, что если M — вторая точка пересечения этих окружностей, то радиус окружности, описанной около треугольника AMD равен R.

Задача 8. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Известно, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > x + y + z.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} > x^3 + y^3 + z^3.$$