Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXIV Московская
математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
13 февраля 2011 года

Задачи и решения подготовили:

В. Д. Арнольд, А. Г. Банникова, М. А. Берштейн, А. Д. Блинков, П. Л. Вытнова, Е. Б. Гладкова, Т. И. Голенищева-Кутузова, С. А. Дориченко, А. А. Заславский, Т. В. Караваева, В. А. Клепцын, Ю. Г. Кудряшов, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон, Н. М. Нетрусова, М. А. Раскин, И. В. Раскина, А. И. Сгибнев, Д. В. Селегей, Л. Е. Федулкин, Е. М. Федулкина, Б. Р. Френкин, А. В. Хачатурян, И. А. Шанин, А. В. Шаповалов, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко

Оперативная информация об олимпиадах — на сайте
www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника
(задания, решения, списки победителей)
www.mccme.ru/matprazdnik/

IX городская устная олимпиада по математике
для 6—7 классов состоится 6 марта 2011 года (воскресенье).
Подробности на сайте olympiads.mccme.ru/ustn/

6 класс

Задача 1. «А это вам видеть пока рано»,— сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!» Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников всё-таки увидели то, что видеть пока рано? **[*3 балла*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 22 ученика.

Решение. То, что видеть пока рано, две трети девочек увидели правым глазом, а две трети мальчиков — левым. Всего, стало быть, один глаз не закрыли две трети всех учеников — 22 человека.

Задача 2. Разрежьте квадрат 6×6 клеточек на трёхклеточные уголки (рис. 1) так, чтобы никакие два уголка не образовывали прямоугольник 2×3 клеточки. **[*3 балла*]** (*В. А. Клепцын*)

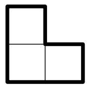


Рис. 1

Решение. См. рис. 2. Решение единственно с точностью до симметрии.

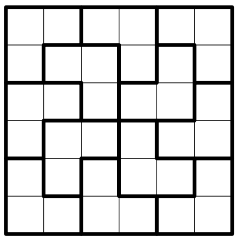


Рис. 2

Задача 3. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;

б) в ворота «Юга» забьют;

в) «Север» выиграет;

г) «Север» не проиграет;

д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счётом закончился матч? **[*5 баллов*]** (*Л. Е. Федулкин, Е. М. Федулкина*)

Ответ. 1:2.

Решение. Поскольку ровно 3 прогноза верны, ровно 2 прогноза неверны.

Разберёмся сначала, какая из команд выиграла. Предположим, что «Север» выиграл. Тогда 4 прогноза («а», «б», «в» и «г») оказались верными, что противоречит условию.

Предположим, что матч закончился ничьей; тогда заведомо неверны прогнозы «а», «в» и «д» (так как при ничьей количество забитых голов чётно). Таким образом верными оказались не более двух прогнозов, что также противоречит условию.

Итак, этот матч «Север» проиграл. Тогда прогнозы «в» и «г» неверны. Значит, все оставшиеся 3 прогноза верны. А именно: ничьей не было, в ворота «Юга» забили, и в матче было забито ровно 3 гола. Но тогда «Юг» забил 2 гола. То есть матч закончился со счётом 1:2.

Задача 4. Найдите все решения ребуса

$$\text{Я} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} = \text{МЫ}.$$

(Одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, разными — разные.) **[*5 баллов*]** (*Д. Э. Шноль*)

Ответ. $0 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 96$.

Решение. Так как $8 \cdot \text{ОН} < 100$, то $\text{ОН} \leqslant 12$, то есть $\text{О} = 1$, а Н равно 0 или 2. Но Н не может быть равно 0, так как тогда Я и Ы означали бы одну и ту же цифру. Значит, $\text{Н} = 2$. Таким образом, $8 \cdot \text{ОН} = 8 \cdot 12 = 96$, значит, МЫ может быть равно 96, 97 или 98. Два последних случая не подходят, так как для них Я должно быть равно 1 или 2, а эти цифры уже использованы. Значит, $\text{МЫ} = 96$, а $\text{Я} = 0$.

Задача 5. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись? **[*8 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

Решение. Каждый гном видит все колпаки, кроме двух: своего и спрятанного. Надо договориться, какой из двух цветов назвать. Это можно сделать, например, так.

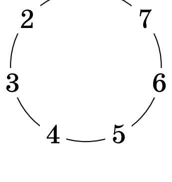


Рис. 3

Пронумеруем цвета числами от 1 до 7 (например, в том же порядке, как и цвета радуги) и заранее расположим их по кругу (рис. 3). Каждый гном должен назвать тот из двух цветов, от которого до другого цвета ближе добраться по часовой стрелке. Тогда три гнома угадают, а три других ошибутся. Например, если спрятан колпак цвета 1, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов 2, 3 и 4.

Можно действовать и по-другому. Если гном не видит два цвета одной чётности, то он называет цвет с бóльшим номером, а если цветá, которые он не видит, имеют разную чётность, то он называет меньший номер. Какой бы цвет ни имел спрятанный колпак, его назовут ровно три гнома. Например, если спрятан колпак цвета 3, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов 1, 4 и 6. Остальные случаи можно разобрать аналогично.

Комментарии. 1. Принцип действия гномов, изложенный во втором решении, применяется в однокруговых шахматных турнирах с нечётным количеством участников для того, чтобы каждый шахматист сыграл белым и чёрным цветом одинаковое количество партий. А именно, каждый участник турнира получает свой номер, и если встречаются шахматисты с номерами одной чётности, то белыми играет тот, у кого больше номер, а если номера участников имеют разную чётность, — белыми играет тот, у кого номер меньше. Можно убедиться, что в этом случае каждый шахматист проведёт белыми и чёрными одинаковое количество партий.

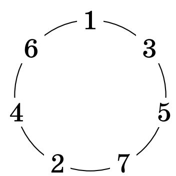


Рис. 4

2. Строго говоря, второе решение отличается от первого только нумерацией цветов. Если расположить цвета по кругу, как на рис. 4, то принцип действия гномов из первого решения в точности описывает второе.

3. Можно доказать, что никакая договорённость не позволит наверняка угадать цвет спрятанного колпака более чем половине гномов.

Задача 6. Деревянный брусок тремя распилами распилили на восемь меньших брусков. На рис. 5 у семи брусков указана их площадь поверхности. Какова площадь поверхности невидимого бруска? **[*8 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 22.

Решение. У каждого малого бруска поверхность распилов составляет половину всей его поверхности. Будем считать только её. Раскрасим малые бруски в чёрный и белый цвета как на рис. 6 (невидимый брусок — чёрный). Тогда каждые два одинаковых соприкасающихся на распиле прямоугольника — разного цвета. Поэтому сумма площадей чёрных распилов равна сумме

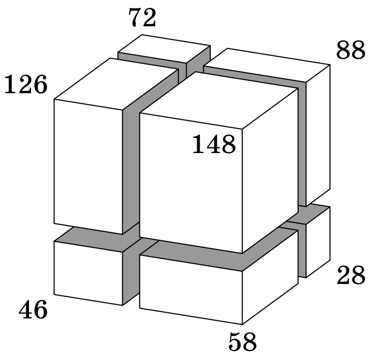


Рис. 5

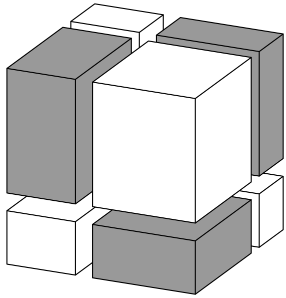


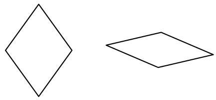
Рис. 6

площадей белых. А тогда и сумма площадей поверхностей белых брусков равна сумме площадей поверхностей чёрных. Отсюда площадь поверхности невидимого чёрного бруска равна

$$(148 + 46 + 72 + 28) - (88 + 126 + 58) = 22.$$

7 класс

Задача 1. Ниже (рис. 8) приведён фрагмент мозаики, которая состоит из ромбиков двух видов: «широких» (рис. 7, *а*) и «узких» (рис. 7, *б*). Нарисуйте, как по линиям мозаики вырезать фигуру, состоящую ровно из 3 «широких» и 8 «узких» ромбиков. (Фигура не должна распадаться на части.) **[*3 балла*]** (*М. А. Раскин*)



а) *б*)

Рис. 7

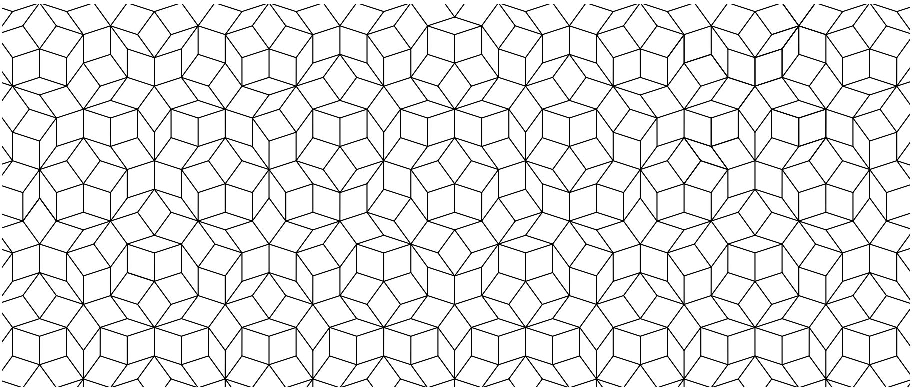


Рис. 8

Решение. Некоторые решения приведены на рис. 9.

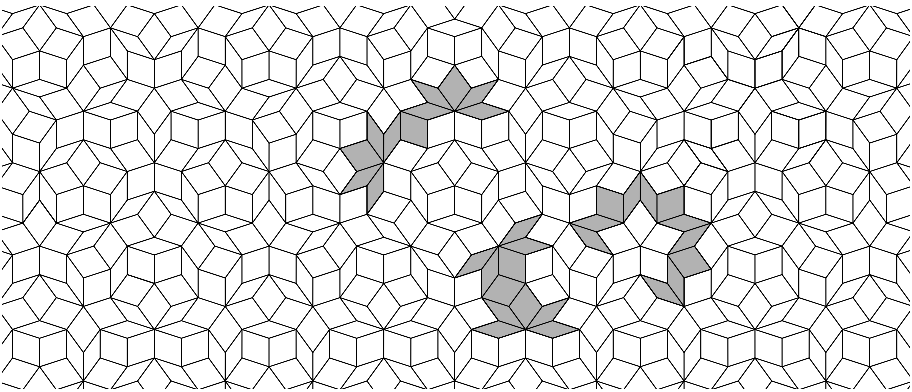


Рис. 9

Комментарии. 1. Объясним, как можно было найти эти решения.

Нам надо включить в нашу фигуру намного больше узких ромбов, чем широких, а широких ромбиков на картинке явно больше (см. также комментарий 3).

Нетрудно убедиться, что каждый узкий ромб граничит не более чем с одним другим узким ромбом, а каждый широкий ромб — не более чем с двумя узкими. Для того чтобы соединить восемь узких ромбов (четыре пары) в один многоугольник, нам как раз придётся включить не меньше трёх широких.

Теперь мы можем заштриховать в некоторой области мозаики все пары граничащих узких ромбов, начать с какой-нибудь пары и попытаться три раза добавить какой-нибудь широкий ромб, соединяющий выбранный кусок с ещё одной парой узких ромбов.

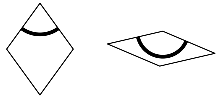


Рис. 10

2. Нарисуем на ромбах дуги, как на рис. 10. *Мозаикой Пенроуза* называется замощение плоскости такими ромбами, при котором каждая дуга, приходящая на границу ромба, продолжается на соседнем ромбе (рис. 11). О фрагменте такой мозаики и идёт речь в задаче.

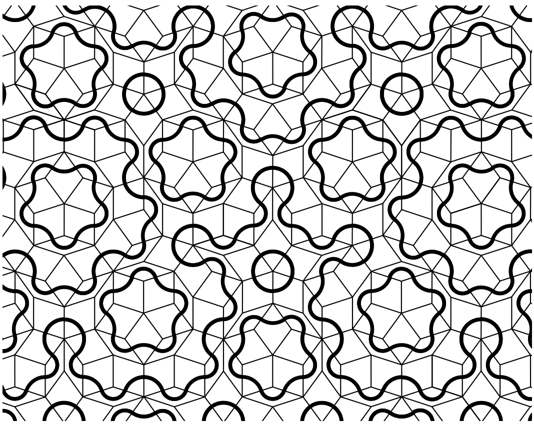


Рис. 11

3. Если взять большой лист бумаги, нарисовать на нём фрагмент мозаики Пенроуза и посчитать все нарисованные ромбы, то широких ромбов будет примерно в 1,6 раз больше. (На самом деле это отношение будет примерно равняться *золотому сечению* — тем ближе к нему, чем больше лист бумаги.)

Задача 2. Вдоль дорожки между домиками Незнайки и Синеглазки росли в ряд цветы: 15 пионов и 15 тюльпанов вперемешку.

Отправившись из дома в гости к Незнайке, Синеглазка поливала все цветы подряд. После 10-го тюльпана вода закончилась, и 10 цветов остались неполитыми.

Назавтра, отправившись из дома в гости к Синеглазке, Незнайка собирал для неё все цветы подряд. Сорвав 6-й тюльпан, он решил, что для букета достаточно. Сколько цветов осталось расти вдоль дорожки? **[*4 балла*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 19 цветов.

Решение. Неполитыми осталось 10 цветов, значит, полито было $30 - 10 = 20$ цветов. Рассмотрим последний политый Синеглазкой тюльпан. Так как всего тюльпанов 15, за этим тюльпаном идёт ещё $15 - 10 = 5$ тюльпанов.

Поэтому Незнайка сорвёт эти 5 тюльпанов и закончит рвать цветы как раз на последнем политом Синеглазкой тюльпане. Но это значит, что все остальные политые цветы уцелели. То есть уцелело $20 - 1 = 19$ цветов.

Задача 3. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;

б) в ворота «Юга» забьют;

в) «Север» выиграет;

г) «Север» не проиграет;

д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счётом закончился матч? **[*4 балла*]**

(*Л. Е. Федулкин, Е. М. Федулкина*)

Решение. См. решение задачи 3 из варианта 6 класса.

Задача 4. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (рис. 12). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8. **[*6 баллов*]**

(*А. В. Хачатурян*)

Ответ. 12.

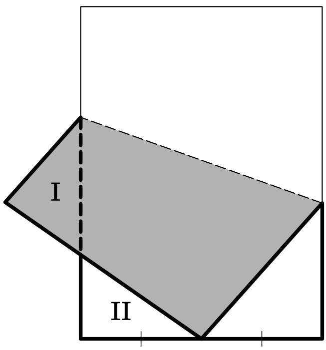


Рис. 12

Решение. Отметим равные отрезки (рис. 13 — здесь мы пользовались тем, что в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны). Видим, что длина большей стороны равна $a+b+4$, а длина меньшей стороны равна $a+b$. Значит, $a+b=8$ и большая сторона имеет длину $a+b+4=8+4=12$.

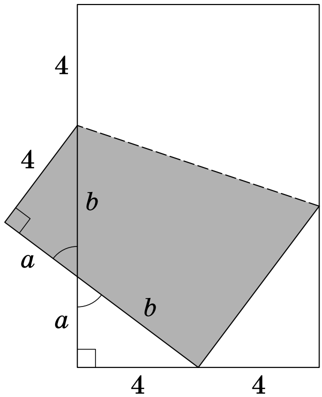


Рис. 13

Комментарий. Применив теорему Пифагора, можно найти длины сторон треугольников I и II. Оказывается, это *египетские* треугольники — треугольники со сторонами 3, 4 и 5.

Задача 5. В справочнике «Магия для чайников» написано:

> Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.

Возможно ли таким образом устроить землетрясение? (Натуральное число, большее 1, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя.) **[*6 баллов*]**

(*А. И. Сгибнев*, *Е. Б. Гладкова*)

Ответ. Нет.

Решение. Подсчитаем буквы в слове «ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ». Буква Е встречается 4 раза, а остальные 9 букв встречаются по одному разу. Это значит, что в числе все 10 цифр будут присутствовать по одному разу, а какая-то одна цифра (соответствующая букве Е) — ещё 3 раза сверх того.

Сумма 10 цифр от 0 до 9 равна 45, т. е. кратна 3. Сумма трёх одинаковых цифр также кратна 3. Тем самым, как бы мы ни заменяли буквы на цифры в слове «ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ», сумма цифр полученного числа будет кратна трём. Значит, по признаку делимости на 3, и полученное число будет делиться на 3.

Поскольку единственное простое число, делящееся на 3, — это само число 3, а наше число заведомо его больше, полученное число не может быть простым.

Задача 6. Числа от 1 до 16 расставлены в таблице 4×4. В каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали (включая диагонали из одной клетки) отметили самое большое из стоящих в ней чисел. (Одно число может быть отмечено несколько раз.) Могли ли оказаться отмечены

а) все числа, кроме, быть может, двух?

б) все числа, кроме, быть может, одного?

в) все числа? **[*6 баллов: а) 1 балл; б) 2 балла; в) 3 балла*]**

(*А. В. Шаповалов*)

Ответ. а) Да; б) да; в) нет.

Решение. Заметим, что числа в углах будут отмечены в любом случае — это числа, стоящие на диагоналях длины 1. Среди остальных чисел есть хотя бы одно неотмеченное. Действительно, рассмотрим наименьшее из чисел, не стоящих в углах. Оно не отмечено, так как на каждой линии вместе с ним есть и другие «неугловые» числа. Значит, все числа отмечены быть не могут.

4	10	9	3
11	16	15	8
12	13	14	7
1	5	6	2

Рис. 14

На рис. 14 приведён пример таблицы, в которой будут отмечены все числа, кроме одного.

Комментарий. Искать этот пример можно было, например, следующим образом. Будем расставлять числа по одному в порядке возрастания.

Чтобы число 1 было отмечено, необходимо поставить его на диагональ длины 1, то есть в угол. Аналогично числа 2, 3 и 4 придётся (если мы хотим, чтобы они были отмечены) поставить в углы (рис. 15).

4			3
1			2

Рис. 15

Теперь куда бы мы ни поставили число 5, отмечено оно не будет (сравните с доказательством того, что все

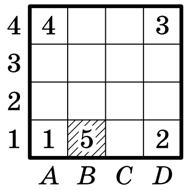


Рис. 16

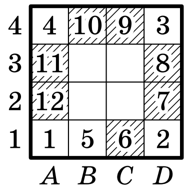


Рис. 17

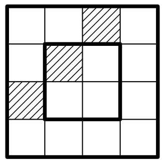


Рис. 18

числа отмечены быть не могут). Поставим его, например, в клетку $B1$ (рис. 16).

Чтобы число 6 было отмечено, необходимо поставить его на одну линию с числом 5 — например, в клетку $C1$. Далее число 7 нужно поставить на одну линию с числами 5 или 6 и т. д. — всего этого можно добиться, расставив числа от 5 до 12 по кругу в клетках на границе квадрата (рис. 17).

Оставшиеся 4 самых больших числа можно уже расставлять в центральном квадрате как угодно, так как каждое из них будет максимальным на диагонали длины 3, не содержащей других чисел из центрального квадрата (рис. 18).

IX устная городская олимпиада по математике для 6—7 классов

состоится 6 марта 2011 года.

На олимпиаду приглашаются школьники, получившие диплом призера или грамоту хотя бы на одном из следующих математических соревнований (текущего или прошлого учебного года):

1. Математический праздник (14.02.10 или 13.02.11);
2. VII городская устная олимпиада (28.02.10);
3. Зимний турнир Архимеда (24.01.10 или 23.01.11);
4. Весенний турнир Архимеда для 5 класса (в личном зачете, 5.04.10).

Для участия в олимпиаде необходимо предварительно зарегистрироваться в соответствующем для вас месте проведения, указав фамилию, имя, класс, школу, округ, вид награды и в каком соревновании она получена. Регистрация проходит с 5 по 28 февраля 2011 года.

Олимпиада будет проводиться:

• для школьников, обучающихся в САО, СВАО, СЗАО, ЦАО и Зеленограде:

6 класс — в Центре образования 218 (Дмитровское шоссе, дом 5 а). Справки по электронной почте ustolimp@school218.ru. Справки по телефону (499) 976-19-85 (понедельник, среда, пятница 16^{00}—18^{00}).

7 класс — в школе 179 (ул. Большая Дмитровка, дом 5/6, строение 7). Справки по электронной почте ustolymp@179.ru.

• для школьников, обучающихся в ЮАО, ЮЗАО, ЮВАО, ЗАО и ВАО:

6 класс — в школе-интернате «Интеллектуал» (Кременчугская ул., 13). Справки по телефону 445-52-10 (понедельник—пятница, 10^{00}—17^{00}, Юлия Владимировна) или по e-mail: a.s.vorontsov@gmail.com (Александр Сергеевич).

7 класс — в гимназии 1543 (ул. 26 Бакинских комиссаров, д. 3, корп. 5). Справки по телефону (495) 433-16-44 (понедельник—пятница, с 14^{00} до 21^{00}) или по электронной почте varis@mccme.ru (Александр Вячеславович).

Школьники, обучающиеся в Подмосковье, выбирают место по территориальному признаку. Школьников из других регионов просим до регистрации связаться с организаторами олимпиады в конкретной школе.

Для заметок

Для заметок

Информация о наборе в 2011 году в 5—8 классы с углубленным изучением математики

Школа	Телефон	Адрес, сайт	Классы	Сроки
2	(499) 137-17-69 (499) 137-69-31	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская») www.sch2.ru	7, 8	с 18 марта по 20 мая
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная») moscowschool54.narod.ru	8	с февраля по четвергам в 9^{20}—11^{00}
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая») www.sch57.msk.ru	8	с 16 марта по средам в 16^{00}
179	(495) 692-48-51	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд») www.179.ru	8	собеседова- ние в марте— апреле
192	(499) 137-33-55 (499) 137-72-85	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.») www.sch192.ru	5, 7; доб. в 8	март—май по пятницам в 16^{00}
218	(499) 976-19-85 (499) 976-63-45	Дмитровское ш., 5а school218.ru	8 (ИУП) 5–7 (дифф.об)	запись на собесе- дование с 4 апреля
463	(499) 612-34-19	ул. Судостроительная, 10, корп. 1 www.sch463.edusite.ru	8	февраль—май по пятницам в 15^{30}
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-44	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная») www.1543.ru	8	апрель
Интел- лектуал	(495) 445-52-10	ул. Кременчугская, 13 (м. «Славянский бульвар») sch-int.ru	5; доб. в 7	запись на сайте с февраля, экз. с 13 марта

Информация предоставлена школами в МЦНМО.
Публикуется бесплатно.
Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте
www.mccme.ru/schools/

Оперативная информация об олимпиадах — на сайте
www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника
(задания, решения, списки победителей)
www.mccme.ru/matprazdnik/