Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного математического образования

LXXVII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
16 февраля 2014 года

Задачи и решения подготовили:

В. Д. Арнольд, Е. В. Бакаев, А. Г. Банникова, А. Д. Блинков, Т. И. Голенищева-Кутузова, С. А. Дориченко, А. А. Заславский, Т. В. Казицына, В. А. Клепцын, Г. А. Мерзон, М. А. Раскин, И. В. Раскина, Н. П. Стрелкова, А. В. Хачатурян, А. В. Шаповалов, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко

При поддержке

Яndex

Экспериментаниум

музей занимательных наук

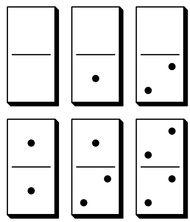
6 класс

Задача 1. Дети ходили в лес по грибы. Если Аня отдаст половину своих грибов Вите, у всех детей станет поровну грибов, а если вместо этого Аня отдаст все свои грибы Саше, то у Саши станет столько же грибов, сколько у всех остальных вместе взятых. Сколько детей ходило за грибами? [*4 балла*] (*И. В. Раскина*)

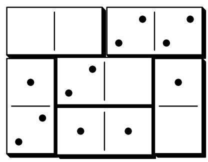
Ответ. 6 детей.

Решение. Пусть Аня отдала половину грибов Вите. Теперь у всех ребят поровну грибов (это означает, что у Вити своих грибов не было). Чтобы Саша теперь получил все Анины грибы, ему надо забрать грибы у Вити и Ани. У него тогда будут грибы трех ребят — Вити, Ани и его собственные. Еще столько же будет у остальных, значит, с Витей, Аней и Сашей в лес ходило еще трое детей.

Задача 2. Из шести костяшек домино (см. рис.) сложите прямоугольник 3×4 так, чтобы во всех трех строчках точек было поровну и во всех четырех столбцах точек было тоже поровну. [*4 балла*] (*Н. П. Стрелкова*)



Ответ. Одно из возможных решений приведено на рисунке.



Комментарий. Всего точек 12, значит, в каждой строчке будет по 4, а в каждом столбике по 3. Пустую доминошку и доминошку с четырьмя точками нельзя ставить вертикально, иначе в соответствующем столбике никак не получится трех точек. Поэтому их естественно расположить горизонтально в одной строчке. После этого нужный пример уже довольно просто нарисовать.

Задача 3. Одуванчик утром распускается, два дня цветет желтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днем на поляне было 20 желтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня 15 желтых и 11 белых.

а) Сколько желтых одуванчиков было на поляне позавчера?

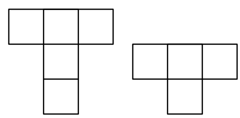
б) Сколько белых одуванчиков будет на поляне завтра?

[*6 баллов*] (*Д. Э. Шноль*)

Ответ. а) 25 желтых одуванчиков; б) 9 белых одуванчиков.

Решение. а) Все одуванчики, которые позавчера были желтыми, стали белыми вчера или сегодня. Поэтому их было $14 + 11 = 25$.

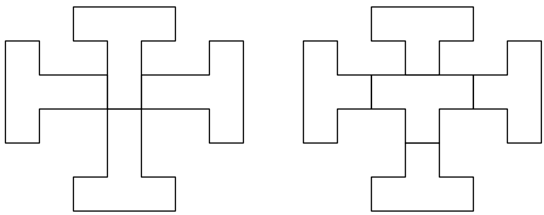
б) Из вчерашних желтых одуванчиков 11 побелели сегодня, а остальные $20 - 11 = 9$ побелеют завтра.



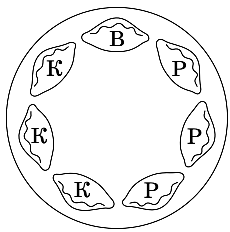
Задача 4. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на четыре фигурки, изображенные слева, а можно — на пять фигурок, изображенных справа. (Фигурки можно поворачивать.)

[*6 баллов*] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. Одна из возможных фигур показана на рисунке.



Комментарий. Придумать такую фигуру можно было, заметив, что большая буква Т уже содержит в себе маленькую, а поэтому нужно взять четыре больших Т и соединить их «ножками» друг с другом так, чтобы лишние клеточки образовали недостающую пятую фигурку.



Задача 5. Мама испекла пирожки — три с рисом, три с капустой и один с вишней — и выложила их на блюдо по кругу (см. рис.). Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. На вид все пирожки одинако-

вые. Маша знает, как они лежали, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Маше наверняка добиться этого, надкусив как можно меньше невкусных пирожков? **[*7 баллов*]** (*А. В. Хачатурян*)

Решение. Понятно, что за одно надкусывание Маша справиться с задачей не сможет. Если Маша, например, попробовала пирожок с капустой, то она не в состоянии определить, какой именно из трех ей достался, а поэтому не сможет с уверенностью найти пирожок с вишней.

Покажем, как Маша справится с задачей за два надкусывания.

Пусть Маша надкусила пирожок, а он оказался не с вишней, а с капустой. Тогда она может попробовать пирожок, лежащий через один от него по часовой стрелке. Если это пирожок с вишней, то Маша добилась своего, если с рисом, то искомый пирожок между надкусанными, а если снова с капустой, то надо брать следующий по часовой стрелке, и это точно будет пирожок с вишней.

Если первый пирожок будет с рисом, Маша может действовать аналогично, но двигаться против часовой стрелки.

Комментарий. Подобным образом Маша может действовать и при большом числе «невкусных» пирожков. Пусть на блюде лежит N холодных пирожков с капустой, потом пирожок с вишней и снова N пирожков с рисом. Маша может заметить средний пирожок с капустой (а если N четно, то любой из двух средних) и запомнить, сколько пирожков от него надо отсчитать по часовой стрелке, чтобы взять пирожок с вишней. Когда пирожки согреются, Маша пробует один пирожок. Пусть ей не повезло, и он оказался с капустой. Маша тогда может представить себе, что она попробовала тот самый средний пирожок, и отсчитать от него сколько нужно. Если она и впрямь угадала, ей достанется вишня, если же нет, то она поймет, оказалась ли она ближе к желанному пирожку, чем выбранный средний, или дальше от него. В любом случае неопределенность уменьшилась вдвое: после одной пробы у Маши «под подозрением» осталось не больше половины пирожков с капустой.

Много интересного о задачах на количество информации можно узнать из книги К. А. Кнопа «Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам» (М., МЦНМО, 2011).

Задача 6. Известный преступник профессор Мориарти долго скрывался от Шерлока Холмса и лондонской полиции. И вот однажды полицейским удалось перехватить телеграмму, которую Мориарти прислал сообщнику:

Встречай завтра поезд СТО вагон О

Инспектор Лестрейд уже распорядился было послать наряд полиции искать нулевой вагон сотого поезда, но тут принесли еще две перехваченные телеграммы на тот же адрес:

СЕКРЕТ − ОТКРОЙ = ОТВЕТ − ТВОЙ

СЕКРЕТ − ОТКРЫТ = 20010

Лестрейд задумался. А Холмс воскликнул: «Теперь ясно, какой поезд надо встречать!» Инспектор удивился.

«Элементарно, Лестрейд! — пояснил сыщик. — Это же шифр. В этих примерах одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные — разные, а черточка — это минус! Мориарти едет в поезде № ...»

Напишите номер поезда и вагона. Объясните, как мог рассуждать Холмс. **[*9 баллов*]** (*И. В. Раскина*)

Ответ. Поезд № 392, вагон № 2.

Решение. Посмотрим на самую длинную телеграмму. Видно, что в правой и левой частях равенства в двух последних разрядах написано одно и то же: ЕТ – ОЙ. Это значит, что и в старших разрядах справа и слева будет одно и то же:

$$\text{СЕКР} - \text{ОТКР} = \text{ОТВ} - \text{ТВ}.$$

Теперь если выполнить вычитания, то и справа и слева сократятся по две буквы, то есть на концах будет по два нуля. Когда мы сократим на 100, получится вот что:

$$\text{СЕ} - \text{ОТ} = \text{О}.$$

Теперь посмотрим на последнюю телеграмму. Если записать ее как пример на сложение в столбик,

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \text{О Т К Р Ы Т} \\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array} \\ \hline \text{С Е К Р Е Т} \end{array}$$

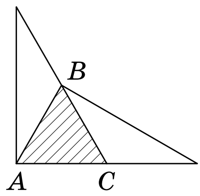
то видно, что ОТ + 2 = СЕ. Сопоставив это с предыдущим равенством, мы понимаем, что О = 2, а тогда С = 3. Кроме того, при сложении произошел перенос из разряда единиц в разряд десятков, а поэтому Т = 8 или Т = 9. Однако, если предположить, что Т = 8, то Е = 0, а тогда при сложении Ы+1 = Е (то есть Ы + 1 = 0) неизбежно произошел бы перенос в следующий разряд. Но этого не было, значит, Т = 9. Мы узнали значения всех нужных букв.

Комментарий. Из решения следует также, что Е = 1 и Ы = = 0. Буквы К, Р, В, Й могут заменять любые четыре из пяти оставшихся цифр: 4, 5, 6, 7, 8, но номера поезда и вагона с ними не связаны.

7 класс

Задача 1. См. задачу 1 для 6 класса.

Решение. См. решения задач для 6 класса.



Задача 2. Два одинаковых прямоугольных треугольника из бумаги удалось положить один на другой так, как показано на рисунке (при этом вершина прямого угла одного попала на сторону другого). Докажите, что заштрихованный треугольник равносторонний. **[*4 балла*]** **(*Е. В. Бакаев*)**

Решение. В треугольнике ABC углы A и C равны (как соответствующие углы равных бумажных треугольников); значит, его стороны AB и BC равны. Но и его стороны AB и AC равны (как соответствующие стороны равных бумажных треугольников); значит, треугольник ABC равносторонний.

Комментарии. 1. В решении никак не используется то, что бумажные треугольники имеют прямой угол, важно только то, что они равны.

2. Разумеется, так можно расположить не любые треугольники, а только треугольники с углом 60°.

Задача 3. Замените в слове МАТЕМАТИКА буквы цифрами и знаками сложения и вычитания так, чтобы получилось числовое выражение, равное 2014. (Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры или знаки, разными — разные. Достаточно привести пример.) **[*6 баллов*]**

(*А. В. Хачатурян*)

Ответ.
$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 8 & 3 & + & 1 & 8 & 3 & 9 & - & 8 & = 2014 \\ \text{М} & \text{А} & \text{Т} & \text{Е} & \text{М} & \text{А} & \text{Т} & \text{И} & \text{К} & \text{А} & \end{array}$$

Комментарий. Чтобы найти решение (а также доказать его единственность), полезно задуматься над тем, какие из букв являются знаками действий.

Ясно, что это не может быть А (как последний символ выражения). Тогда между двумя первыми цифрами А должен стоять хотя бы один знак. Знак Т не может быть ни минусом, ни плюсом (даже МА $+$ $+$ЕМА $+$ ИКА заведомо меньше $99+999+899<2000$). Небольшой перебор показывает, что (даже если считать, что выражение может начинаться со знака плюс или минус) М тоже не может быть знаком.

Остается случай, когда плюс — это Е, а еще где-то стоит минус. Выражение МАТ $+$ МАТ $-$ КА заведомо меньше 2000, поэтому минус — это не И, а К. Выражение МАТ $+$ МАТИ $-$ А равно МАТ $\cdot 11+($И $-$ А$)$, поэтому МАТ $\cdot 11=2013$ (другие числа, делящиеся на 11, далеки от 2014) — это приводит к единственному ответу.

Задача 4. Одуванчик утром распускается, три дня цветет желтым, на четвертый день утром становится белым, а к вечеру пятого дня облетает. В понедельник днем на поляне было 20 желтых и 14 белых одуванчиков, а в среду — 15 желтых и 11 белых. Сколько белых одуванчиков будет на поляне в субботу? **[*6 баллов*]** (*Д. Э. Шноль*)

Ответ. 6 белых одуванчиков.

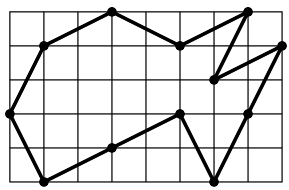
Решение. Распустившийся одуванчик бывает белым на четвертый и пятый день. Значит, в субботу будут белыми те одуванчики, которые распустились во вторник или среду. Определим, сколько их.

14 одуванчиков, которые были белыми в понедельник, к среде облетели, а 20 желтых заведомо дожили до среды (быть может, став белыми).

В среду на поляне было $15+11=26$ одуванчиков. Мы знаем, что 20 из них были на поляне еще в понедельник, а остальные $26-20=6$ как раз распустились во вторник и среду.

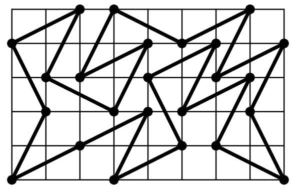
Комментарий. Нетрудно заметить, что число белых одуванчиков в понедельник никак на ответ не влияет.

Задача 5. Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника 5×8, идущие по диагоналям прямоугольников 1×2. На рисунке изображен пример пути, проходящего по 12 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать путь как можно длиннее.

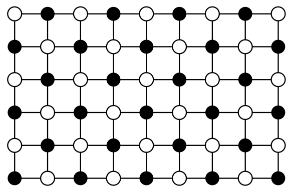


Пересекать уже проведенные диагонали или проходить второй раз через уже посещенные вершины не разрешается. **[*по 1 баллу за каждую диагональ сверх 16*]**
(*Е. В. Бакаев*)

Ответ. Наиболее длинный известный жюри замкнутый путь (24 диагонали) изображен на рисунке. Есть ли более длинные пути, жюри неизвестно.



Комментарии. 1. При первом взгляде на задачу может возникнуть подозрение, что путь длиннее 20 диагоналей нарисовать нельзя: «так как каждая диагональ занимает две клетки, всего их не больше $5 \cdot 8 : 2 = 20$». Но в действительности прямоугольники, «занимаемые» разными диагоналями, могут пересекаться. Именно поэтому в примере выше так много острых углов.



2. Можно заметить, что любой путь, удовлетворяющий условию задачи, имеет четную длину. Действительно, если мы покрасим узлы сетки в шахматном порядке (см. рис.), то каждая диагональ («ход коня») соединяет узлы разных цветов; значит, чтобы закончить путь в том же узле, в котором он начинался, нужно сделать четное число ходов.

Задача 6. На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно

– либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;

– либо разделить одно из чисел пополам, если оно четное.

Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник? Опишите его стратегию и докажите, что она выигрышная.

[*8 баллов*] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. Петя может выиграть.

Решение. Пускай Петя первым ходом заменит 2015 на 2014, а каждым следующим ходом будет уравнивать числа (он всегда может это сделать, повторив ход Васи с тем числом, которое Вася не менял):

$$\begin{tikzcd}
(2014, 2015) \arrow[d, "\text{п}"'] & (2014, A) \arrow[d, "\text{п}"'] & (A, B) \arrow[d, "\text{п}"'] & \dots \\
(2014, 2014) \arrow[ur, "\text{в}"] & (A, A) \arrow[ur, "\text{в}"] & (B, B) \arrow[ur, "\text{в}"] &
\end{tikzcd}$$

Если Петя будет действовать так всю игру, то, конечно, в некоторый момент Вася сделает из одного из двух одинаковых чисел однозначное и выиграет.

Но посмотрим на этот момент внимательнее. Если Вася выиграл, заменив одно из двух чисел X на однозначное, то перед этим, на ходу Пети, одно из двух чисел X на доске уже было. В этот момент Петя может заменить X на однозначное число и выиграть:

$$\begin{tikzcd}
 & & (Y, \text{однозначное}) \\
 & (Y, X) \arrow[ur, "\text{п}"] \arrow[d, "\text{п}"'] & (X, \text{однозначное}) \\
(Y, Y) \arrow[ur, "\text{в}"] & (X, X) \arrow[ur, "\text{в}"] &
\end{tikzcd}$$

(Петя может так пойти, потому что у него есть все возможности, которые были у Васи на последнем, выигрышном ходе: делить число X пополам, если оно четное, и вычитать из него его же цифру.)

Итак, сформулируем стратегию Пети полностью: «если одно из чисел можно заменить на однозначное — сделать это; в противном случае уравнять два числа».

XII устная городская олимпиада по математике
для 6—7классов

состоится 16 марта 2014 года.

На олимпиаду приглашаются школьники, получившие диплом призера или грамоту хотя бы на одном из следующих математических соревнований:

- Математический праздник (17.02.13 или 16.02.14),
- XI городская устная олимпиада (17.03.13),
- Зимний турнир Архимеда (20.01.13 или 19.01.14),
- Весенний турнир Архимеда для 5 класса (в личном зачете, 7.04.13),
- II (муниципальный) этап Всероссийской олимпиады школьников для 7 класса (08.12.2013).

Для участия в олимпиаде необходима предварительная регистрация. Подробности на сайте olympiads.mccme.ru/ustn/

Информация о наборе в 5—8 классы с углублённым изучением математики в 2014 году

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы	Сроки
2	(499) 137-17-69 (499) 137-69-31 www.sch2.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	6, 7, 8 физ.-мат.	март — май
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8	по графику на сайте
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.msk.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8	март — апрель
179	(495) 692-48-51 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	7, 8	март
192	(499) 137-33-55 (499) 137-72-85 www.sch192.ru	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.»)	5, 7; добор в 8	апрель — май
218	(499) 976-19-85 school218.ru	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 (ИУП)	март — май
1189	(495) 193-60-23 schsz1189.mskobr.ru	ул. Маршала Василевского, 9, корп. 1 (м. «Щукинская»)	5, 7	март — май
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-44 www.1543.ru	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8	апрель
2007	(495) 716-29-35 fmsh2007.ru	ул. Горчакова, 9, корп. 1 (м. «Ул. Горчакова»)	5, 7; добор в 6, 8	апрель — май
Интел-лектуал	(499) 445-52-10 sch-int.ru	ул. Кременчугская, 13 (м. «Славянский бульвар»)	5; добор в 6 — 8	март — июнь

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте
www.mccme.ru

Оперативная информация об олимпиадах — на сайте www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника (задания, решения, списки победителей) www.mccme.ru/matprazdnik/