

Департамент образования города Москвы  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
Механико-математический факультет  
Московское математическое общество  
Центр педагогического мастерства  
Московский центр непрерывного математического образования

LXXVIII Московская  
математическая олимпиада

# Математический праздник

Москва  
15 февраля 2015 года

Задачи и решения подготовили:

*А. В. Антропов, В. Д. Арнольд, Е. В. Бакаев,  
А. Г. Банникова, А. Д. Блинков, И. Р. Высоцкий,  
Т. И. Голенищева-Кутузова, С. А. Дориченко,  
А. А. Заславский, О. А. Заславский, Т. В. Казицына,  
Д. М. Креков, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон,  
М. А. Раскин, И. В. Раскина, А. В. Хачатурян,  
А. В. Шаповалов, Д. Э. Шноль, И. В. Яценко*

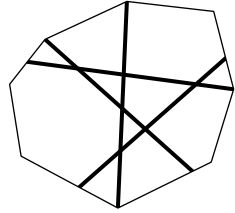
При поддержке

**Я**ndex

**ЭКСПЕРИМЕНТАНИУМ**  
МУЗЕЙ ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ НАУК

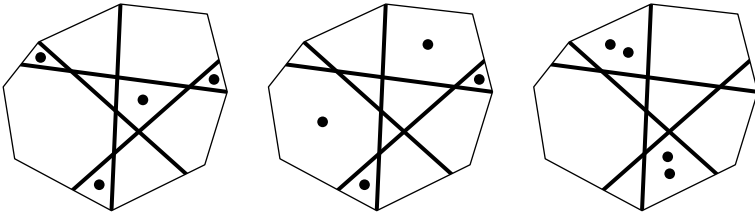
## 6 класс

**Задача 1.** Через двор проходят четыре пересекающиеся тропинки (см. план). Посадите четыре яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь.

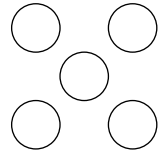


[3 балла] (Е. В. Бакаев)

**Ответ.** Яблони можно посадить многими способами, например так, как показано на рисунках.



**Задача 2.** а) Впишите в каждый кружочек по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках — в 5 раз меньше суммы остальных цифр.

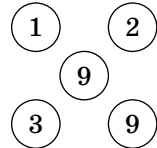


б) Докажите, что задача имеет единственное решение.

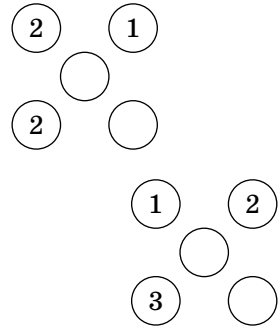
[6 баллов] (А. В. Шаповалов)

**Ответ.** а) См. рисунок.

**Решение.** б) Если сумма цифр в двух верхних кружочках в 7 раз меньше суммы остальных цифр, то она в 8 раз меньше суммы всех пяти цифр. Рассуждая так же, получим, что сумма цифр в двух левых кружочках в 6 раз меньше суммы всех пяти цифр. Значит, сумма всех цифр делится без остатка и на 6, и на 8. Минимальное такое натуральное число — это 24. Следующее число равно 48, но сумма всех пяти цифр не может превышать  $5 \cdot 9 = 45$ .



Итак, сумма всех цифр 24, сумма двух верхних  $24:8=3$ , сумма двух левых  $24:6=4$ . Легко видеть, что цифры в трех кружках слева и сверху можно разместить только двумя способами (см. рис.), причем в первом случае сумма двух остальных цифр равна 19, что невозможно, а во втором равна 18, что возможно, только если они обе девятки.



**Задача 3.** Математик с пятью детьми зашел в пиццерию.

*Маша:* Мне с помидорами и чтоб без колбасы.

*Ваня:* А мне с грибами.

*Даша:* Я буду без помидоров.

*Никита:* А я с помидорами. Но без грибов!

*Игорь:* И я без грибов. Зато с колбасой!

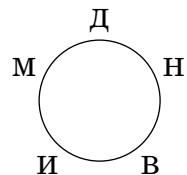
*Папа:* Да, с такими привередами одной пиццей явно не обойдешься...

Сможет ли математик заказать две пиццы и угостить каждого ребенка такой, какую тот просил, или все же придется три пиццы заказывать? [**5 баллов**] (Е. В. Бакаев)

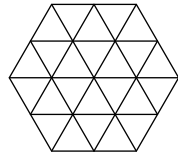
**Ответ.** Нет, не сможет.

**Решение.** Пусть удалось обойтись двумя пиццами. Для Вани мы должны заказать пиццу с грибами. Другие мальчики грибы не едят, так что вторая пицца непременно будет с помидорами и колбасой. Маша такую пиццу есть откажется, так что в Ванину пиццу мы будем вынуждены добавить помидоры. Теперь помидоры есть в обеих пиццах, и для Даши придется заказывать третью пиццу.

*Комментарий.* Решение можно сделать более наглядным с помощью следующей схемы. Посадим детей в пиццерию за круглый стол так, как показано на рисунке. Любые двое, сидящие рядом, не станут есть одну пиццу (проверьте!). Но если заказано всего две пиццы, то какая-то достанется по крайней мере троим, а среди трех ребят всегда найдутся соседи за столом.

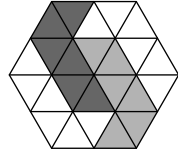


**Задача 4.** Разрежьте нарисованный шестиугольник на четыре одинаковые фигуры. Резать можно только по линиям сетки. [6 баллов] (Е. В. Бакаев)



**Ответ.** См. рисунок.

*Комментарий.* Решение единственно с точностью до поворотов и отражений.



**Задача 5.** Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов? Обоснуйте свой ответ.

[8 баллов] (А. В. Шаповалов)

**Ответ.** 45.

**Решение.** Отложим пока мандарины в сторону. Осталось  $20 + 30 + 40 = 90$  фруктов. Поскольку обезьяне мы скармливаем не более одного мандарина, каждая обезьяна съест из этих 90 фруктов по крайней мере два. Значит, обезьян не более чем  $90 : 2 = 45$ . Покажем, как можно осчастливить 45 обезьян:

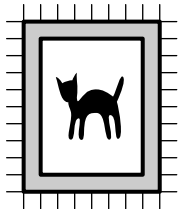
5 обезьян съедают: грушу, банан, мандарин;

15 обезьян съедают: грушу, персик, мандарин;

25 обезьян съедают: персик, банан, мандарин.

Всего 45 счастливых обезьян — и еще осталось пять неиспользованных мандаринов!

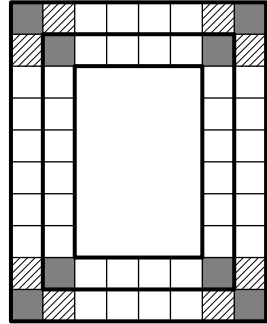
**Задача 6.** Юра начертил на клетчатой бумаге прямоугольник (по клеточкам) и нарисовал на нем картину. После этого он нарисовал вокруг картины рамку шириной в одну клеточку (см. рис.). Оказалось, что площадь картины равна площади рамки. Какие размеры могла иметь Юрина картина? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)



[8 баллов] (Т. И. Голенищева-Кутузова)

**Ответ.**  $3 \times 10$  или  $4 \times 6$  клеточек.

**Решение.** Очевидно, что ширина картины больше одной клеточки. Нарисуем внутри картины еще одну рамку шириной в одну клеточку (см. рис.). Тогда в маленькой рамке, как и в большой, будет по четыре угловых клеточки (они закрашены), а каждая сторона будет на две клеточки короче. Значит, в маленькой рамке будет на 8 клеточек меньше, чем в большой (эти клеточки заштрихованы). Значит, из 8 клеточек и составитя прямоугольник, образовавшийся внутри маленькой рамки. Очевидно, что прямоугольник площадью 8 клеточек может иметь размеры  $2 \times 4$  или  $1 \times 8$  клеточек. Отсюда и получаем ответ.

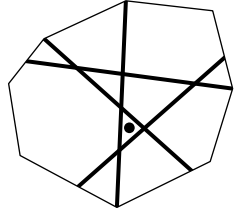


*Комментарий.* Те, кто уже хорошо знаком с алгеброй, могут получить ответ другим способом. Если картина — прямоугольник  $a \times b$  клеточек, то картина в рамке — это уже прямоугольник  $(a + 2) \times (b + 2)$  клеточек. Площадь картины в рамке вдвое больше площади картины без рамки, поэтому  $(a + 2)(b + 2) = 2ab$ . Раскрывая скобки, получим  $2a + 2b + 4 = ab$ . Можно теперь привести это равенство к виду  $(a - 2)(b - 2) = 8$  и получить, что либо одно из чисел  $a - 2$  и  $b - 2$  равно 1, а другое 8, либо же одно из чисел  $a - 2$  и  $b - 2$  равно 2, а другое 4. Эти варианты и приводят к верным ответам.



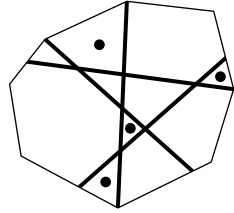
7 класс

**Задача 1.** Во дворе, где проходят четыре пересекающиеся тропинки, растет одна яблоня (см. план). Посадите еще три яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь. [4 балла] (Е. В. Бакаев)



**Ответ.** См. рисунок.

*Комментарий.* Решение единственно.



**Задача 2.** В аквариуме живет три вида рыбок: золотые, серебряные и красные. Если кот съест всех золотых рыбок, то рыбок станет на 1 меньше, чем  $\frac{2}{3}$  исходного числа. Если кот съест всех красных рыбок, то рыбок станет на 4 больше, чем  $\frac{2}{3}$  исходного числа. Каких рыбок — золотых или серебряных — больше и на сколько?

[4 балла] (И. Р. Высоцкий, И. В. Раскина)

**Ответ.** Серебряных рыбок на 2 больше.

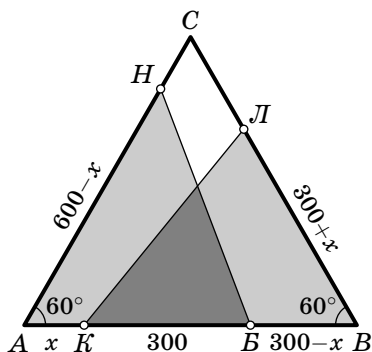
**Решение.** Из первого условия золотых рыбок на 1 больше, чем треть. Из второго условия красных рыб на 4 меньше, чем треть. Значит, серебряных на 3 больше, чем треть.

**Задача 3.** См. задачу 4 для 6 класса.

[5 баллов]

**Задача 4.** Смешарики живут на берегах пруда в форме равностороннего треугольника со стороной 600 м. Крош и Бараш живут на одном берегу в 300 м друг от друга. Летом Лосяшу до Кроша идти 900 м, Барашу до Ньюши — тоже 900 м. Докажите, что зимой, когда пруд замерзнет и можно будет ходить прямо по льду, Лосяшу до Кроша снова будет идти столько же метров, сколько Барашу до Ньюши. [6 баллов] (Е. В. Бакаев, А. В. Хачатурян)

**Решение.** Пусть Крош живет на расстоянии  $x$  от ближайшего к нему угла пруда,  $AK = x$ . Тогда расстояние от Бараша до его угла пруда есть  $BV = 600 - 300 - x = 300 - x$ . Теперь по условию  $VL = 900 - BK = 300 + x$  (отметим, что так как  $900$  — это ровно половина периметра пруда, каким из двух путей идти Лосяшу до Кроша, неважно),  $АН = 900 - АВ = 600 - x$ . Осталось заметить, что треугольники  $АНВ$  и  $ВКЛ$  равны по углу ( $\angle A = 60^\circ = \angle B$ ) и двум прилежащим к нему сторонам ( $AB = 300 + x = VL$ ,  $АН = BK = 600 - x$ ). Значит, равны и их соответствующие стороны  $ЛК$  и  $ВН$ .



*Комментарий.* То, что Ньюша действительно живет на стороне  $AC$  (а не на стороне  $BC$ ) видно из того, что  $600 - x < 600$  (после того, как Бараш прошел  $300 + x$  до вершины  $A$ , ему остается до Ньюши еще  $600 - x < AC$ ). Аналогичным образом, Лосяш живет именно на стороне  $BC$ .

**Задача 5.** Имеется набор из двух карточек:  $\boxed{1}$  и  $\boxed{2}$ . За одну операцию разрешается составить выражение, использующее числа на карточках, арифметические действия, скобки. Если его значение — целое неотрицательное число, то его выдают на новой карточке. (Например, имея карточки  $\boxed{3}$ ,  $\boxed{5}$  и  $\boxed{7}$ , можно составить выражение  $\boxed{7} \boxed{5} / \boxed{3}$  и получить карточку  $\boxed{25}$  или составить выражение  $\boxed{3} \boxed{5}$  и получить карточку  $\boxed{35}$ .)

Как получить карточку с числом 2015 а) за 4 операции;  
б) за 3 операции? [8 баллов] (И. В. Яценко)



**Ответ.** а) Например,

$$\boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{3}; \quad \boxed{3} + \boxed{2} = \boxed{5}; \quad \boxed{3} - \boxed{2} - \boxed{1} = \boxed{0}; \quad \boxed{2} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{5} = \boxed{2015}$$

или

$$\boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{3}; \quad \boxed{1} \boxed{3} = \boxed{13}; \quad \boxed{3} \boxed{1} = \boxed{31}; \quad (\boxed{2} + \boxed{3}) \cdot \boxed{13} \cdot \boxed{31} = \boxed{2015}.$$

б)  $\boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{3}; \quad \boxed{3} \cdot \boxed{2} \boxed{1} = \boxed{63}; \quad (\boxed{63} + \boxed{2}) \cdot \boxed{3} \boxed{1} = \boxed{2015}.$

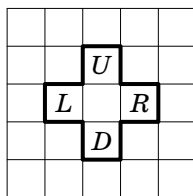
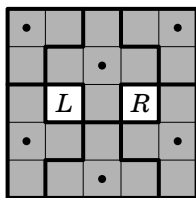
*Комментарии.* 1. Чтобы решить задачу, полезно для начала разложить 2015 на простые множители:  $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ .

2. Менее чем за 3 операции получить карточку с числом 2015 невозможно.

**Задача 6.** Петя записал 25 чисел в клетки квадрата  $5 \times 5$ . Известно, что их сумма равна 500. Вася может попросить его назвать сумму чисел в любой клетке и всех ее соседей по стороне. Может ли Вася за несколько таких вопросов узнать, какое число записано в центральной клетке? **[8 баллов]** (Е. В. Бакаев)

**Ответ.** Да.

**Решение.** Задав вопросы про 6 клеток, отмеченных на рисунке слева, Вася может узнать сумму всех чисел, кроме  $L$  и  $R$ . Вычитая ее из 500, он найдет  $L + R$ . Аналогичным образом он может найти  $U + D$ . После этого Васе остается узнать сумму чисел в центральном кресте и вычесть из нее  $(L + R) + (U + D)$ .





*XIII устная городская олимпиада по математике  
для 6–7 классов*

состоится 9 марта 2015 года.

На олимпиаду приглашаются школьники, получившие диплом призера или грамоту хотя бы на одном из следующих математических соревнований:

- Математический праздник (16.02.14 или 15.02.15),
- XII городская устная олимпиада (16.03.14),
- Зимний турнир Архимеда (19.01.14 или 18.01.15),
- Весенний турнир Архимеда для 5 класса (в личном зачете, 06.04.14),
- II (муниципальный) этап Всероссийской олимпиады школьников для 7 класса (07.12.2014).

Для участия в олимпиаде необходима предварительная регистрация до 1 марта.

Подробности на сайте [olympiads.mcsme.ru/ustn/](http://olympiads.mcsme.ru/ustn/)

## Информация о наборе в 5—8 классы с углублённым изучением математики в 2015 г.

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы
2	(499) 137-17-69 www.sch2.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	6, 7 добор в 8
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.msk.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8
91	(495) 690-35-58 91.ru	ул. Поварская, 14 (м. «Арбатская»)	5—8
179	(495) 692-48-51 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	7—8
192	(499) 137-33-55 (499) 137-72-85 www.sch192.ru	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.»)	7
218	(499) 976-19-85 school218.ru	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 (ИУП)
444	(495) 465-23-52 (495) 465-60-52 schv444.mskobar.ru	ул. Ниж. Первомайская, 14 (м. «Первомайская»)	5, 7, 8 добор в 6
Курчат- товская	(499) 194-10-44	ул. Маршала Василевского, 9 корп. 1 (м. «Щукинская»)	5, 7
1329	sch1329.mskobr.ru	ул. Никулинская, 10 (м. «Юго-Западная»)	5—8
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-44 www.1543.ru	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8
2007	(495) 716-29-35 fmsh2007.ru	ул. Горчакова, 9, корп. 1 (м. «Ул. Горчакова»)	5—8
Интел- лектуал	(499) 445-52-10 sch-int.ru	ул. Кременчугская, 13 (м. «Славянский бульвар»)	5; добор в 6—8

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.  
 Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте [www.mcsme.ru](http://www.mcsme.ru)



Оперативная информация об олимпиадах — на сайте [www.olimpiada.ru](http://www.olimpiada.ru)  
 Страница Математического праздника (задания, решения, победители)  
[www.mcsme.ru/matprazdnik/](http://www.mcsme.ru/matprazdnik/)