Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного математического образования

LXXX Московская математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
19 февраля 2017 года

Задачи и решения подготовили:

*А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, А. Г. Банникова,
А. Д. Блинков, Т. И. Голенищева-Кутузова,
С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, А. А. Заславский,
Т. В. Казицына, В. А. Клепцын, Н. Ю. Медведь,
Г. А. Мерзон, И. В. Раскина, А. В. Хачатурян,
М. А. Хачатурян, А. В. Шаповалов, Д. Э. Шноль,
И. В. Ященко*

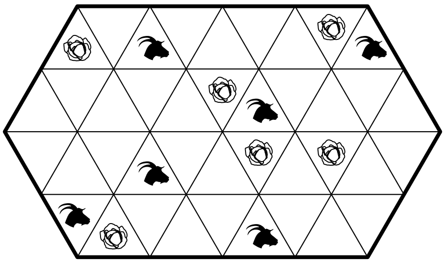
При поддержке

Яndex

ЭКСПЕРИМЕНТАНИУМ
МУЗЕЙ ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ НАУК

6 класс

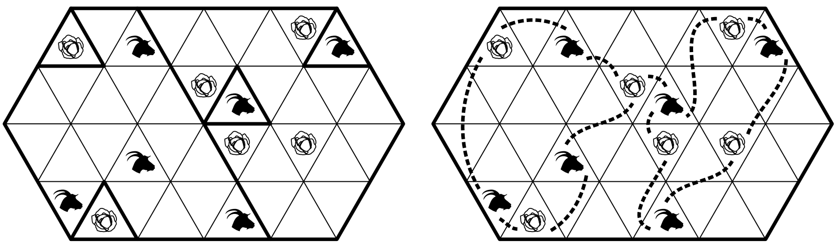
Задача 1. Фермер огородил снаружи участок земли и разделил его на треугольники со стороной 50 м. В некоторых треугольниках он высадил капусту, а в некоторые пустил пастись коз. Помогите фермеру построить по линиям сетки дополнительные заборы как можно меньшей общей длины, чтобы защитить всю капусту от коз.



[***За суммарную длину 700 м — 1 балл, менее 700 м — 4 балла***]

(*М. А. Хачатурян*)

Ответ. На рисунке слева показано, как построить заборы общей длиной 650 м.



Комментарий. Можно доказать, что забор меньшей длины построить нельзя. На рисунке справа показаны 13 пунктирных линий. Каждая из них может быть путём, по которому одна из коз доберётся до капусты. Значит, мы должны каждую линию перекрыть забором. Но можно заметить, что никакие две линии нельзя перечеркнуть одной стороной треугольника. Значит, на перечёркивание всех 13 линий потребуется как минимум 13 заборов по 50 м.

Задача 2. На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, т. е. делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.) [***4 балла***] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. Нет, не может.

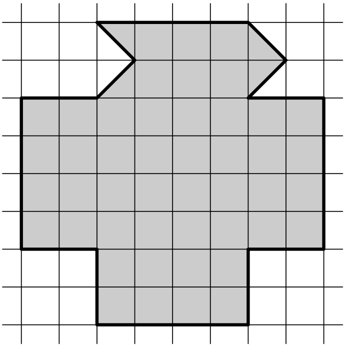
Решение. Все двузначные числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6 или 8, чётны, а оканчивающиеся на 5 кратны пяти. Поэтому такие числа не будут простыми, и писать эти цифры на карточках не имеет смысла. Остаются цифры 1, 3, 7 и 9. Если цифры 3 и 9 записаны на разных карточках, то из них можно сложить составное число 39. Если же они записаны на одной карточке, то на второй записаны 1 и 7, и тогда можно сложить составное число $91 = 7 \cdot 13$.

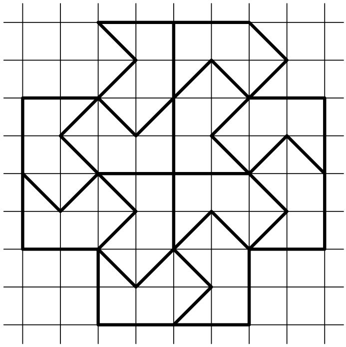
Задача 3. Среди всех граней восьми одинаковых по размеру кубиков треть синие, а остальные — красные. Из этих кубиков сложили большой куб. Теперь среди видимых граней кубиков ровно треть — красные. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб, полностью красный снаружи. [***5 баллов***] (*А. В. Шаповалов*)

Решение. У восьми кубиков $8 \cdot 6 = 48$ граней. Из них $48 : 3 = 16$ синих. На гранях большого куба $2 \times 2 \times 2$ мы видим $6 \cdot 4 = 24$ грани маленьких кубиков, из них $24 : 3 = 8$ красные, а остальные $24 - 8 = 16$ синие. Итак, все 16 синих граней маленьких кубиков расположены на поверхности большого, т. е. все невидимые грани красные. Теперь можно каждый кубик повернуть так, чтобы три его скрытые красные грани оказались снаружи.

Можно обойтись и без подсчёта числа граней. По условию синие грани составляют $1/3$ от их общего числа. На поверхности большого куба мы видим ровно половину граней каждого кубика (три из шести), т. е. мы видим половину всех граней. Синих из них $2/3$, т. е. $2/3 \cdot 1/2 = 1/3$ от их общего числа. Значит, все синие грани снаружи, и мы можем повернуть каждый кубик, спрятав эти грани вовнутрь.

Задача 4. Разрежьте фигуру на двенадцать одинаковых частей. **[*6 баллов*]** (*Е. В. Бакаев*)





Ответ. См. рисунок.

Задача 5. Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе? **[*7 баллов*]** (*И. В. Раскина*)

Ответ. 23.

Первое решение. Раздадим три раза по две пачки, останется $3 \cdot 1 = 3$ печенья. Но те же шесть пачек печенья можно раздать иначе — три и ещё три, и тогда останется $2 \cdot 13 = 26$ печений. Значит, $26 - 3 = 23$ печенья можно поделить между туристами поровну. Поскольку число 23 простое, это возможно, только если туристов 23.

Второе решение. Разделим сначала две пачки печенья. Осталось одно лишнее. Разделим третью пачку. В ней $13 - 1 = 12$ лишних печений. Но тогда в двух пачках должно было быть $12 \cdot 2 = 24$ лишних печенья. Почему же на самом деле одно? Потому что $24 - 1 = 23$ печенья туристы смогли разделить поровну. Поскольку число 23 простое, это возможно, только если туристов 23.

Комментарий. Количество печений в пачке из условия задачи узнать нельзя. Их могло быть 12, 35, 58 и т. д.

Задача 6. Кощей Бессмертный взял в плен 43 человека и увёз их на остров. Отправился Иван-Царевич на двухместной лодке выручать их. А Кощей ему и говорит:

— Надоело мне этих дармоедов кормить, пусть плывут отсюда на твоей лодке подобру-поздорову. Имей в виду: с острова на берег доплыть можно только вдвоём, а обратно и один справится. Перед переправой я скажу каждому не менее чем про 40 других пленников, что это оборотни. Кому про кого скажу, сам выберешь. Если пленник про кого-то слышал, что тот оборотень, он с ним в лодку не сядет, а на берегу находиться сможет. Я заколдую их так, чтобы на суше они молчали, зато в лодке рассказывали друг другу про всех известных им оборотней. Пока хоть один пленник остаётся на острове, тебе с ними плавать нельзя. Лишь когда все 43 окажутся на том берегу, одному из них можно будет за тобой приплыть. А коли не сумеешь устроить им переправу — останешься у меня навсегда.

Есть ли у Ивана способ пройти испытание и вернуться с пленниками домой? **[*8 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. Да, есть.

Решение. Иван может разбить пленников на двадцать пар и одну тройку и велеть Кощею сказать каждому, что все, кроме входящих с ним в одну пару (тройку), — оборотни. Тогда условие будет выполнено, а переправиться пленники смогут вот как. Назовём пленников из тройки A, B и C. Сначала переправляются A и B, потом A возвращается обратно. Затем переправляется некоторая пара, а возвращается B. В результате одна пара пленников переправлена на берег, а все остальные вместе с лодкой находятся на острове. Аналогично переправляются все остальные пары. Затем переправляются A и B, A возвращается и перевозит C. После этого C может отправиться за Иваном. Заметим, что при такой переправе никто в лодке никакой новой информации об оборотнях не узнал.

Комментарий. Аналогичный способ переправы работает при любом разбиении пленников на пары и тройки.

7 класс

Задача 1. См. задачу 1 для 6 класса.

Задача 2. У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому — 101 г мёда, а третьему — 102 г перекиси водорода. Гирьки он ставил всегда на одну чашу весов, а товар — на другую. Могло ли быть так, что каждая гирька легче 90 г?

[*4 балла*] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. Да, могло.

Решение. Подойдут гирьки с весами 49,5 г, 50,5 г и 51,5 г. Первая и вторая гирьки вместе весят 100 г, первая и третья — 101 г, а вторая и третья — 102 г.

Комментарий. Найти пример и доказать, что он единствен, можно следующим образом. Для начала заметим, что ни в одном из взешиваний не участвовала ровно одна гирька: иначе её вес был бы больше 90 г.

Если в каком-то взвешивании участвовали все три гирьки, то это могло быть только третье взвешивание, т. е. сумма весов всех гирек равна 102 г. Тогда, чтобы аптекарь мог получить 100 г и 101 г, одна из гирек должна весить 1 г, а другая — 2 г. Но тогда оставшаяся гирька весит 99 г, что нам не подходит.

Значит, в каждом взвешивании участвовали ровно по две гирьки, притом каждый раз — разные. Если сложить веса всех гирек во всех трёх взвешиваниях, то, с одной стороны, мы получим удвоенный вес всех трёх гирек, а с другой стороны, $100+101+102=303$ г. Значит, сумма весов всех трёх гирек равна 151,5 г. Поэтому вес самой лёгкой гирьки равен $151{,}5-102=49{,}5$ г, вес следующей — $151{,}5-101=50{,}5$ г, а вес самой тяжёлой — $151{,}5-100=51{,}5$ г.

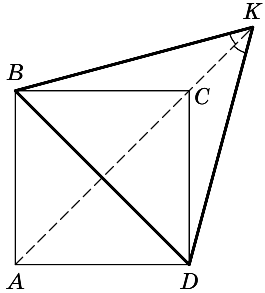
Задача 3. См. задачу 3 для 6 класса.

Задача 4. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK=AC$. Найдите угол BKC. **[*6 баллов*]** (*Е. В. Бакаев*)

Ответ. 30°.

Решение. Поскольку картинка симметрична относительно прямой AC, имеем $DK=BK$. По условию $BK=AC$.

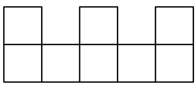
А так как диагонали в квадрате равны, $AC = BD$. Таким образом, в треугольнике BKD все стороны равны, т. е. он равносторонний, и $\angle BKD = 60°$. Опять же в силу симметрии относительно прямой AC имеем $\angle BKC = \angle DKC$, а в сумме эти углы составляют угол в $60°$, т. е. каждый из них равен $30°$.



Комментарий. Равенства $DK = BK$ и $\angle BKC = \angle DKC$ можно доказать и не используя понятие симметрии.

Действительно, в треугольниках BCK и DCK сторона CK общая, $BC = CD$ как стороны квадрата, $\angle BCK = \angle CKD$, поскольку каждый из них смежен углу в $45°$. Значит, треугольники BCK и DCK равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $DK = BK$ и $\angle BKC = \angle DKC$ как соответствующие элементы равных треугольников.

Задача 5. Можно ли так расставить цифры 1, 2, ..., 8 в клетках а) буквы Ш; б) полоски (см. рис.), чтобы при любом разрезании фигуры на две части сумма всех цифр в одной из частей делилась на сумму всех цифр в другой? (Резать можно только по границам клеток. В каждой клетке должна стоять одна цифра, каждую цифру можно использовать только один раз.)



а)

б)

[*8 баллов: а) 3 балла; б) 5 баллов*]

(*А. В. Шаповалов*)

Решение. Пусть сумма чисел в одной из частей равна x, в другой y и y делится на x. Тогда и $x + y$ делится на x, а это сумма всех чисел, она равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. Значит, меньшая из сумм частей является делителем числа 36. Верно и обратное: если 36 делится на x, то и оставшаяся сумма $36 - x$ делится на x.

а) **Ответ.** Да, можно: см. рисунок.

2		1		4
7	3	5	6	8

Для фигуры, заполненной как на рисунке, при разрезании на две части получаются такие меньшие суммы: 2, $2+7=9$, $2+7+3=12$, 1, $6+8+4=18$, $8+4=12$, 4. Как видим, все они являются делителями числа 36.

Есть и другие расстановки, удовлетворяющие условию задачи.

б) **Ответ.** Нет, нельзя.

Выпишем все делители числа 36, меньшие этого числа, и их дополнения до 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 30, 32, 33, 34, 35.

Предположим, что расставить числа в полоске требуемым образом удалось. Выпишем сумму чисел в первой клетке, первых двух клетках, первых трёх клетках и т. д. У нас получится возрастающая последовательность из восьми чисел, первое из которых не больше 8, а последнее равно 36. При этом соседние члены этой последовательности различаются не больше чем на 8.

Если в этой последовательности есть число 18, то предыдущее число должно быть не менее $18-8=10$. Единственное число между 10 и 18 в последовательности — это 12. Следовать за 18 может число не более $18+8=26$, подходит только 24. Но тогда в двух разных клетках должно стоять число $6=18-12=24-18$.

Следовательно, числа 18 в этой последовательности нет. Но тогда посмотрим на тот момент, когда после числа, меньшего 18, идёт число, большее 18. Разность этих чисел должна быть равна как минимум $24-12=12$. Но они должны отличаться на число, не большее 8. Противоречие.

Задача 6. Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе. **[*8 баллов*]**

(*А. В. Шаповалов*)

Решение. Представим, что сначала все 49 школьников стоят в коридоре, и будем постепенно запускать их в класс.

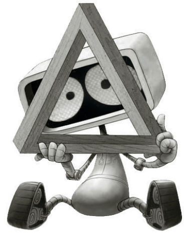
При этом будем делать это так, чтобы в классе в любой момент времени дети были разбиты на требуемые группы.

Пусть в коридоре стоит школьник Фёдор. Если он знаком с каким-то другим школьником, стоящим в коридоре, то просто запустим их двоих в класс.

Иначе все знакомые Фёдора уже в классе. Так как в классе менее 50 школьников, они разбиты менее чем на 25 групп. Значит, среди знакомых Фёдора какие-то двое находятся в одной группе. Если это группа из 2 школьников, то впустим Фёдора в класс, добавив его к этой группе. Если же это группа из 3 школьников, то попросим одного из знакомых Фёдора образовать с ним группу, а оставшихся школьников оставим вдвоём.

Так, постепенно впуская школьников в класс, мы добьёмся того, что все школьники будут разделены на требуемые группы.

ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ



Ежемесячный иллюстрированный
журнал для школьников 5 – 8 классов

В журнале вы найдёте интересные статьи и задачи по математике, лингвистике, физике и другим естественным наукам, сможете принять участие в математическом конкурсе и конкурсе по русскому языку!

Знаете ли вы:

- **Почему на Земле бывают приливы?**
- **Как жуки-светлячки включают и выключают свет?**
- **Почему у листа А4 такие размеры?**
- **Как сделать мини-робота?**
- **Что такое теория вероятностей?**
- **Почему чай и кофе бодрят?**

Ответы на эти и многие другие вопросы ищите в журнале «Квантик»!

Всю продукцию «Квантика» — журналы, альманахи, плакаты, календари загадок — можно купить в интернет-магазине **kvantik.ru**, а также в магазине «Математическая книга» по адресу: г. Москва, Большой Власьевский переулок, д. 11.

Подписаться на «Квантик» можно в отделениях Почты России по двум каталогам и через интернет на сайте **vipishi.ru** по каталогу МАП:

Каталог «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» агентства «РОСПЕЧАТЬ»:
индекс **80478** (на год)
индекс **84252** (на полгода или несколько месяцев)

«Каталог Российской прессы» (МАП):
индекс **11348** (на год)
индекс **11346** (на полгода или несколько месяцев)

ВСЕ ПОДРОБНОСТИ О ЖУРНАЛЕ — НА САЙТЕ KVANTIK.COM

Информация о наборе в 5—8 классы с углублённым изучением математики в 2017 г.

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы
2	(499) 137-17-69 www.sch2.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	6—7, добор в 8
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8
179	(495) 692-48-51 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	7—8
218	(499) 976-19-85 school218.ru	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 (ИУП)
444	(495) 465-23-52 (495) 465-60-52 schv444.mskobr.ru	ул. Ниж. Первомайская, 14 (м. «Первомайская»)	5
1329	sch1329.mskobr.ru	ул. Никулинская, 10 (м. «Юго-Западная»)	5, 6, 8, добор в 6—8
1534	gym1534.ru	ул. Кедрова, 11 (м. «Академическая»)	5, добор в 7, 8
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-58 www.1543.ru	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8
2007	(495) 716-29-35 fmsh2007.ru	ул. Горчакова, 9, корп. 1 (м. «Ул. Горчакова»)	5, добор в 6—8
Курча- товская	(499) 194-10-44 kurchat.mskobr.ru	ул. Маршала Василевского, 9, корп. 1 (м. «Щукинская»)	5

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте schools.mccme.ru

Оперативная информация об олимпиадах: www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника
(задания, решения, победители)
www.mccme.ru/matprazdnik/