

Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного математического образования

LXXXIII Московская
математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
9 февраля 2020 года

Задачи и решения подготовили:

*Е. В. Бакаев, А. Д. Блинков, М. А. Волчков,
Т. И. Голенищева-Кутузова, А. В. Грибалко,
С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, А. А. Заславский,
О. А. Заславский, Т. В. Казицына, В. А. Клепцын,
Ю. С. Маркелов, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон,
В. Ю. Радионов, И. В. Раскина, А. А. Трунин,
А. В. Хачатурян, М. А. Хачатурян, А. В. Шаповалов,
Д. Э. Шноль, И. В. Яценко*

Рисунок Алексея Вайнера

При поддержке

Яндекс

В проведении Математического праздника также участвуют

Московский физико-технический институт
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
НИТУ «МИСиС»
РТУ МИРЭА

6 класс

Задача 1. Таня сфотографировала четырёх котиков, поедających сосиски (рис. 1). Вскоре она сделала ещё один кадр (рис. 2). Каждый котик ест свои сосиски непрерывно и с постоянной скоростью, а на чужие не покушается. Кто доест первым и кто последним? Ответ объясните.

Рис. 1

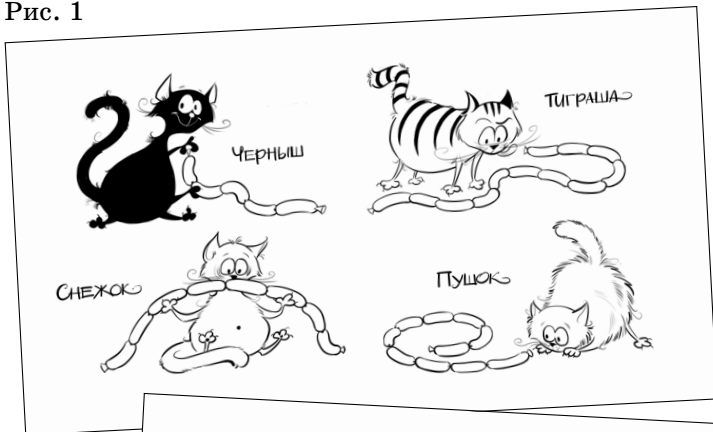


Рис. 2



[5 баллов]

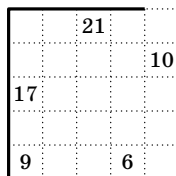
(Т. И. Голенищева-Кутузова, Т. В. Казицына, А. А. Трунин)

Ответ. Первым доест Тиграша, последним — Снежок.

Решение. За время, которое прошло между двумя фотографиями, Черныш съел 2 сосиски, Тиграша 5, Снежок 3, а Пушок 4. Подождём ещё такое же время и снова по-

смотрим на котиков. Черныш съест ещё 2 сосиски, ему останется одна, то есть понадобится ещё половина того времени. То же и с Пушком: он съест 4, и ему останется доест две сосиски, на что тоже уйдёт половина того времени. Тиграша съест 5 сосисок, и ему останется съесть две, что меньше половины от пяти. Снежок же съест 3 сосиски, и ему останется две, что составляет более половины от трёх. Поэтому Тиграша справится со своими сосисками раньше всех, а Снежок — позже всех.

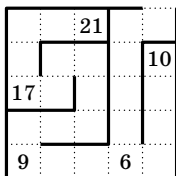
Задача 2. На клетчатой бумаге был нарисован лабиринт: квадрат 5×5 (внешняя стена) с выходом шириной в одну клетку, а также внутренние стенки, идущие по линиям сетки. На рисунке мы скрыли от вас все внутренние стенки. Начертите, как они могли располагаться, зная, что числа, стоящие в клетках, показывают наименьшее количество шагов, за которое можно было покинуть лабиринт, стартовав из этой клетки (шаг делается в соседнюю по стороне клетку, если они не разделены стенкой). Достаточно одного примера, пояснения не нужны.



[5 баллов]

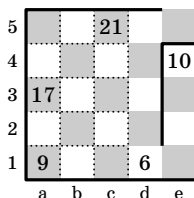
(М. А. Евдокимов, А. В. Хачатурян)

Ответ. См. рисунок.

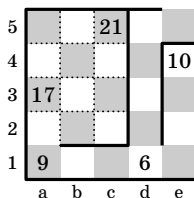


Комментарий. Можно доказать, что внутренние стенки были расположены именно так. Будем постепенно восстанавливать стенки, исходя из условия задачи. Жирной линией обозначим стенки, в наличии которых мы уверены, линиями из точек обозначим пока не исследованные границы, а в тех местах, где точно есть проход, линию сотрём совсем. Чтобы отдельные клетки были хорошо видны, раскрасим лабиринт в шахматном порядке. Ну и раз уж наш рисунок стал похож на шахматную доску, воспользуемся обозначениями, принятыми у шахматистов, —

обозначим столбцы латинскими буквами, а строки — цифрами. Заметим, что между e4 и e5 точно есть стенка, иначе в e4 было бы 2, а не 10. Теперь посмотрим на клетку d1 с цифрой 6. Из неё до выхода шесть шагов, даже если бы никаких стенок не было, поэтому из d1 к выходу можно пройти по столбцам d и e с одним переходом из d в e. Стенка между e4 и e5 показывает, что переход этот возможен только между d5 и e5, поэтому весь столбец d свободен от поперечных стенок. Наоборот, между d4 и e4, d3 и e3, d2 и e2 стенки есть, иначе из e4 можно было бы выйти быстрее, чем за десять шагов. Вот что у нас получилось:



Из c5 можно выйти за 21 шаг. Поскольку клеток 25, а заходить в «аппендикс» e1–e4 значит удлинять путь, кратчайший путь из c5 пройдёт по всем остальным клеткам лабиринта. И это значит, что последние шесть клеток этого пути начнутся в d1, то есть между столбцами c и d везде, кроме первой строки, есть стенки — иначе в столбец d можно было бы попасть раньше. Путь из a1 по первой строке до d1 и далее уже по известной дороге занимает ровно девять шагов, и теперь понятно, что отклоняться от него нельзя. А тогда между c1 и c2, b1 и b2 есть стенки, иначе длинный путь из c5 можно было бы сократить. Вот что нам теперь понятно:



Путь из c5 проходит через a3, то есть туда из c5 мы должны попасть за четыре шага. С учётом необходимости посещения клетки a5 это можно сделать только одним способом. У нас не должно быть возможности свернуть с этого отрезка пути, поэтому между c5 и c4, b5 и b4, a4 и b4 есть стенки. Стенка есть и между a3 и a2, иначе в a3 было бы 11, а не 17. Вот что сейчас получилось:

5			21		
4					10
3	17				
2					
1	9			6	
	a	b	c	d	e

Теперь нетрудно восстановить две оставшиеся стенки и получить ответ.

Задача 3. На доске написаны числа 2, 3, 4, ..., 29, 30. За рубль можно отметить любое число. Если какое-то число уже отмечено, можно бесплатно отмечать его делители и числа, кратные ему. За какое наименьшее число рублей можно отметить все числа на доске?

[6 баллов]

(И. В. Яценко)

Ответ. За 5 рублей.

Решение. Отметим числа 17, 19, 23 и 29, потратив четыре рубля. Затем отметим число 2, потратив ещё рубль. После этого мы сможем бесплатно отметить все чётные числа (так как они делятся на 2), а после этого все нечётные числа, не превосходящие 15, — для любого из них (допустим, для числа n) чётное число $2n$ у нас отмечено, и мы можем отметить n как его делитель. Осталось отметить 21, 25 и 27, и это тоже делается бесплатно: 25 делится на отмеченное число 5, а 21 и 27 — на отмеченное число 3. При любом способе решения задачи простые числа 17, 19, 23 и 29, превышающие 15, придётся отмечать за деньги — они не являются делителями или кратными каких-либо чисел на доске. Значит, 4 рубля мы потратим только на них. Чтобы отметить хотя бы что-то ещё, придётся тратить пятый рубль. Значит, дешевле чем за пять рублей условия задачи не выполнить.

Комментарий. На самом деле, отметив «большие» простые числа, мы могли бы вместо двойки отметить любое из оставшихся чисел на доске. В самом деле, потом мы бесплатно отметим его наименьший простой делитель p . Если $p = 2$, действуем по алгоритму, описанному выше. Если нет, отмечаем $2p$ (это

можно сделать, так как $p < 15$), потом отмечаем двойку, а дальше всё остальное уже известным способом.

Аналогичное решение применимо и для произвольно длинного набора $2, 3, 4, \dots, N$ — мы вынуждены отметить за деньги все «большие» простые числа (превышающие $N/2$), а потом отмечаем за рубль любое из оставшихся чисел. Далее бесплатно отмечаем двойку способом, описанным выше, затем отмечаем все чётные числа, потом все «малые» простые числа (не превышающие $N/2$), потому что любое «малое» p будет делителем $2p$. Теперь можно отметить все остальные неотмеченные числа: каждое из них будет делиться на свой минимальный простой делитель — «малое» простое число.

Задача 4. Миша сложил из кубиков куб $3 \times 3 \times 3$. Затем некоторые соседние по грани кубики он склеил друг с другом. Получилась цельная конструкция из 16 кубиков, остальные кубики Миша убрал. Обмакнув конструкцию в чернила, он поочерёдно приложил её к бумаге тремя гранями. Вышло слово КОТ (см. рис.). Что получится, если отпечатать грань, противоположную букве «О»?



[8 баллов]

(М. А. Евдокимов, О. А. Заславский, А. В. Шаповалов)

Ответ. См. рисунок.



Решение. Поскольку можно напечатать букву Т, какие-то два угловых кубика убраны. Остальные шесть угловых кубиков должны остаться, так как иначе не получится напечатать К и О. Отсюда получаем, что буквы К и О расположены на соседних гранях, причем все три кубика, соединяющие эти грани, есть. Теперь букву Т можно расположить только на грани, противоположной букве К. Итак, места 13 из 16 кубиков определены (см. рис. 1). Оставшиеся три должны скрепить конструкцию. Кубики с цифрами 1 и 2

сейчас как бы «висят в воздухе» — они не приклеены ни одной своей гранью к остальным. Причём если их какой-то гранью и можно приклеивать, то только той, на которой мы написали цифры 1 и 2. Поэтому к этим граням у Миши неминуемо приклеено по кубику. Но эти кубики всё ещё не делают конструкцию жёсткой: пары склеенных только что кубиков продолжают «висеть в воздухе». Мише удалось всё закрепить ровно одним добавочным кубиком — значит, он приклеил его к обоим парам. Не испортив букву К, это можно сделать единственным образом (см. рис. 2).

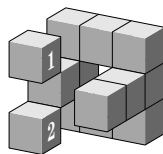


Рис. 1

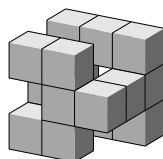


Рис. 2

Теперь можно посмотреть на грань, противоположную грани «О», и нарисовать от-
вет (с точностью до поворота грани).

Задача 5. В лесу живёт 40 зверей — лисицы, волки, зайцы и барсуки. Ежегодно они устраивают бал-маскарад: каждый надевает маску животного другого вида, причём два года подряд они одну и ту же маску не носят. Два года назад на балу было 12 «лисиц» и 28 «волков», год назад — 15 «зайцев», 10 «лисиц» и 15 «барсуков», а в этом году — 15 «зайцев» и 25 «лисиц». Каких зверей в лесу больше всего?

[8 баллов] (М.А. Хачатурян)

Ответ. Больше всего барсуков.

Решение. Запишем данные задачи в виде таблицы.

	«Волки»	«Лисы»	«Зайцы»	«Барсуки»
Два года назад	28	12		
Год назад		10	15	15
В этом году		25	15	

Посмотрим на «зайцев». Последние два года в масках зайцев было 30 зверей. Всё это разные звери, так как никто два года подряд маску зайца не наденет. И это не зайцы. Значит в лесу есть по крайней мере 30 не-зайцев, то есть

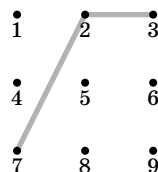
зайцев не более $40 - 30 = 10$. Такое же рассуждение про зверей, которые два последних года были на празднике «лисами», показывает, что настоящих лис не более чем $40 - 10 - 25 = 5$. Два года назад на маскараде было 28 «волков», и всё это были не настоящие волки, настоящих же не более $40 - 28 = 12$. Итак, волков, лис и зайцев вместе не более чем $12 + 5 + 10 = 27$. Это значит, что барсуков как минимум $40 - 27 = 13$, и это самый многочисленный вид животных в лесу.

Заметим, что можно подобрать количества зверей каждого вида и так распределить маски, чтобы все условия задачи выполнялись. От участников олимпиады приводить такой пример не требовалось, но любознательный читатель, мы надеемся, сможет при желании его придумать.

Задача 6. Ваня придумывает число из неповторяющихся цифр без нулей — пароль для своего телефона. Пароль работает так: если, не отрывая палец от экрана, последовательно соединить отрезками точки, соответствующие цифрам пароля, телефон разблокируется. При этом телефон не позволяет соединять отрезком две точки, между которыми есть третья: если Ваня соединит, например, 1 и 3, телефон «подумает», что Ваня вводит 1-2-3.

Ваня хочет, чтобы при вводе пароля линия движения пальца не пересекала сама себя. А ещё чтобы перестановкой цифр пароля ни в каком порядке, кроме обратного, нельзя было получить другую такую линию. Например, пароль 1263 Ване не нравится, так как линия 6-3-2-1 другая, но тоже не имеет самопересечений.

Ваня придумал пароль 723 (см. рис.). Эти три цифры — 2, 3 и 7 — действительно никакой другой линией соединить нельзя. Жаль только, что пароль такой короткий.



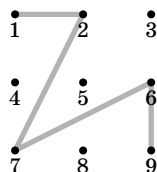
Помогите Ване придумать пароль подлиннее. В ответе напишите сам пароль и нарисуйте ту единственную линию, которую можно получить из этих цифр.

[8 баллов]

(И. В. Яценко)

Ответ. Например, 12769. См. рисунок.

Этот пароль удовлетворяет Ваниным требованиям. Посмотрим, как можно соединить без самопересечений его цифры. Цифру 7 с какой-то цифрой соединить надо, это может быть либо 2, либо 6. Пусть, например, мы провели отрезок 7-6. Теперь 9 можно соединить только с 6. Далее неизбежно надо провести отрезки 7-2 и 2-1, и мы получаем линию, изображённую на рисунке. Если бы мы сначала вместо 7-6 провели 7-2, линия получилась бы та же самая. Таким образом, эта линия единственна.



Комментарий. Интересно, что устраивающий Ваню пароль из четырёх цифр придумать невозможно. Не существует и пароля из шести и более цифр. Пятизначных паролей возможно восемь: 12769, 96721, 14389, 98341, 32947, 74923, 78163, 36187. Впрочем, линии для всех восьми паролей одной и той же формы, а отличаются только поворотом, симметрией или направлением вычерчивания.

7 класс

Задача 1. В ребусе ЯЕМЗМЕЯ = 2020 замените каждую букву в левой части равенства цифрой или знаком арифметического действия (одинаковые буквы одинаково, разные — по-разному) так, чтобы получилось верное равенство. Достаточно привести один пример, пояснений не требуется. [4 балла] (А. А. Заславский, О. А. Заславский)

Ответ. $2 \times 505 \times 2 = 2020$.

Задача 2. См. задачу 2 для 6 класса.

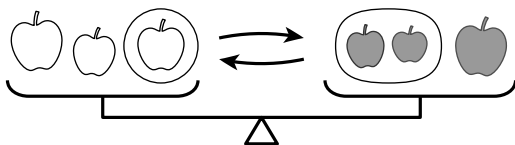
[4 балла]

Задача 3. На столе лежат 6 яблок (не обязательно одинакового веса). Таня разложила их по 3 на две чашки весов, и весы остались в равновесии. А Саша разложил те же яблоки по-другому: 2 яблока на одну чашку и 4 на другую, и весы опять остались в равновесии. Докажите, что можно положить на одну чашку весов одно яблоко, а на другую два так, что весы останутся в равновесии. [6 баллов]

(А. В. Шаповалов)

Решение. Посмотрим на три яблока, которые Таня положила на одну из чаш. Назовём их зелёными.

Могли ли все они и у Саши попасть на одну чашу? Нет, так их вес — это уже половина общего веса яблок. Значит, два зелёных яблока окажутся на одной из чаш, а третье на другой. Могли ли на одной чаше остаться только эти два зелёных яблока? Нет, так как их вес — меньше половины общего веса. Значит, к ним Саша добавил два яблока с другой чаши (назовём их красными).



То есть у Тани на одной чаше лежали три зелёных яблока, а у Саши на одной из чаш лежит два зелёных яблока и два красных. От замены одного из зелёных яблок на два красных общий вес яблок на чаше не поменялся (он равен половине общего веса яблок). Значит, мы нашли яблоко, которое весит столько же, сколько два других.

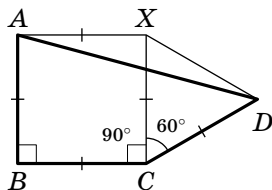
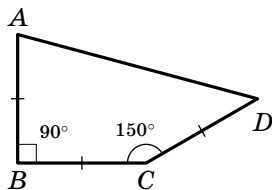
Задача 4. Три стороны четырёхугольника равны, а углы четырёхугольника, образованные этими сторонами, равны 90° и 150° . Найдите два других угла этого четырёхугольника. [8 баллов] (М.А. Волчкевич)

Ответ. 45° и 75° .

Решение. Обозначим вершины четырёхугольника как на рисунке.

Достроим ABC до квадрата $ABCX$. В треугольнике XCD угол XCD равен $\angle BCD - \angle BCX = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$, а стороны CX и CD равны. Значит, треугольник XCD — равнобедренный с углом 60° , т.е. равносторонний (в частности, отрезок XD также равен стороне квадрата).

Теперь, когда мы поняли, что наш четырёхугольник получается из



квадрата и правильного треугольника, можно посчитать его углы. Треугольник AXD равнобедренный с углом $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ при вершине.

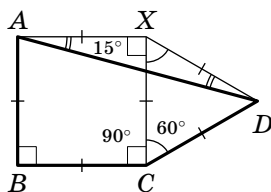
Поэтому

$$\angle XAD = \angle XDA = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Значит,

$$\angle BAD = \angle BAX - \angle XAD = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ;$$

$$\angle ADC = \angle XDC - \angle XDA = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$



Задача 5. См. задачу 5 для 6 класса.

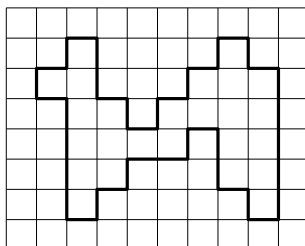
[8 баллов]

Задача 6. Можно ли данную фигуру («верблюда») разбить

а) по линиям сетки;

б) не обязательно по линиям сетки

на 3 части, из которых можно сложить квадрат?



[а) 4 балла; б) 6 баллов]

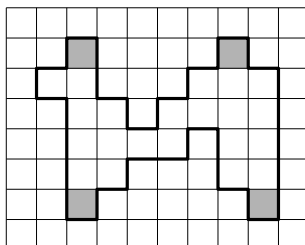
(Ю. С. Маркелов, ученик 10 класса)

Ответ. а) Нельзя; б) можно.

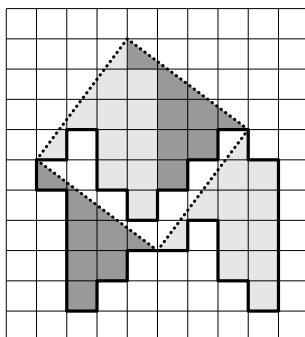
Решение. Заметим, что площадь верблюда — 25 клеток. То есть складывать нам предстоит квадрат со стороной 5.

а) Посмотрим на 4 клетки, отмеченные на рисунке. Любые две из них «далеко друг от друга»: разделены минимум 4 строками или столбцами. Поэтому при разрезании две отмеченные клетки не могут попасть в одну часть (такая часть не уместилась бы в квадрат 5×5). Значит, чтобы

сложить квадрат 5×5 , верблюда необходимо разрезать хотя бы на 4 части (если резать по клеточкам).



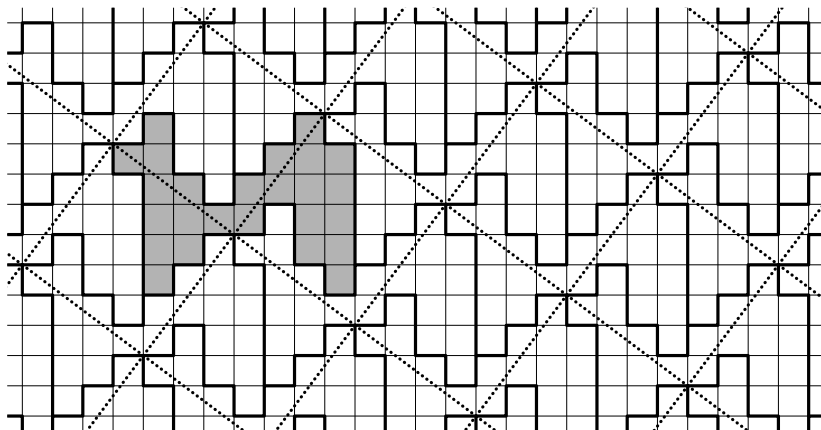
б) Как разрезать верблюда и сложить квадрат — показано на рисунке.



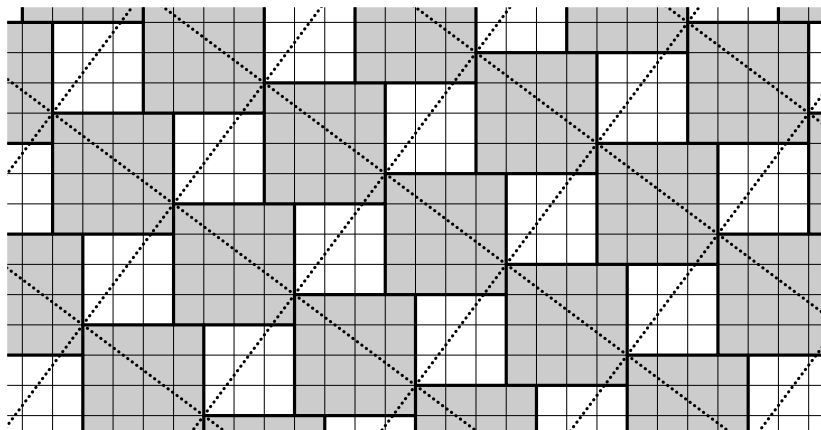
Комментарии. 1. Решив пункт а), можно догадаться, что в пункте б) сторона квадрата должна идти не по линиям сетки. Чтобы найти на клетчатой бумаге отрезок длины 5, не идущий по линиям сетки, полезно вспомнить про египетский треугольник (прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5).

2. Можно заметить, что сдвинутыми копиями верблюда можно замостить плоскость как паркетом (см. рис.). Отметив соответствующие точки верблюдов (на рисунке взяты «носы»), мы увидим, что они расположены в вершинах квадратной решетки.

Посмотрим на один из таких квадратов. Каждая его часть — кусочек одного из сдвинутых верблюдов. Сдвинув их обратно, мы получим разрезание исходного верблюда на части, из которых можно сложить квадрат. Остается найти такое положение квадрата, при котором частей получается три.



Подобным образом замощения помогают решить разные задачи на разрезание. Например, при помощи замощения квадратами, показанного ниже, можно доказать теорему Пифагора!



*XVIII устная городская олимпиада по математике
для 6–7 классов
состоится 22 марта 2020 года.*

Подробности и регистрация: olympiads.mccme.ru/ustn/

Ж У Р Н А Л К В А Н Т И К

Д Л Я Л Ю Б О З Н А Т Е Л Ь Н Ы Х

Ежемесячный научно-познавательный
журнал для школьников 5-8 классов



В журнале вы найдёте интересные статьи и задачи по математике, лингвистике, физике и другим естественным наукам, сможете принять участие в математическом конкурсе и конкурсе по русскому языку!

Знаете ли вы:

- Как казарки защищаются от града?
- Что такое теплопроводность?
- Можно ли потушить Солнце водой?
- Чем круг отличается от квадрата?
- Любую ли зеркальную комнату можно осветить одной свечой?

**Ответы на эти и многие другие вопросы ищите
в журнале «Квантик»!**

Редакция выпускает серию «Библиотечка журнала «Квантик».

Вышли в свет две книги:

- М. Евдокимов «Сто граней математики»
- С. Федин «Перепутаница»

Всю продукцию «Квантика» — журналы, альманахи, книги, плакаты, календари загадок — можно купить в магазине «Математическая книга», по адресу: г. Москва, Большой Власьевский переулок, д. 11 (сайт: biblio.mccme.ru), а также в интернет-магазине kvantik.ru

Подписаться на журнал «Квантик» можно в отделениях Почты России по двум каталогам или онлайн на сайте агентств «Роспечать» и «АРЗИ»

Каталог «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» агентства «РОСПЕЧАТЬ»:

индекс **80478** (на год)
индекс **84252** (на полгода
или несколько месяцев)

Объединённый каталог «Пресса России»:

индекс **11348** (на год)
индекс **11346** (на полгода
или несколько месяцев)

ВСЕ ПОДРОБНОСТИ О ЖУРНАЛЕ — НА САЙТЕ [KVANTIK.COM](http://kvantik.com)

Информация о наборе в 5—8 классы с углублённым изучением математики в 2020 г.

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы
2	(499) 137-17-69 www.sch2.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская», «Университет»)	6, 7, добор в 8
171 (54)	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая», «Кропоткинская»)	8
58	(499) 665-33-31 58.mskobr.ru	ул. Твардовского, д. 12А (м. «Строгино»)	7, 8
179	(495) 692-17-80 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	6—8
444	(495) 465-23-52 schv444.mskobr.ru	ул. Ниж. Первомайская, 14 (м. «Первомайская»)	5, 6, добор в 5—8
1329	sch1329.mskobr.ru	ул. Никулинская, 10 (м. «Юго-Западная»)	5, 6, добор в 7, 8
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-58 www.1543.ru	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8
2007	(495) 716-29-35 fmsh2007.ru	ул. Горчакова, 9, корп. 1 (м. «Ул. Горчакова»)	5, добор в 6—8
2101	(499) 144-26-65 sch2101.mskobr.ru	ул. Кастанаевская, 29, корп. 1 (м. «Филевский парк», «Славянский бульвар»)	7, 8
школа им. Маршала В.И. Чуйкова	schuv.mskobr.ru	Таможенный пр-д, 4 ул. Судакова, 29	5, 7, 8, добор в 6—8

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
 Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте schools.mccme.ru



Приглашаем в классы «Математической вертикали»
 в школах каждого района Москвы
cpm.dogm.mos.ru/math-vertical/



Оперативная информация об олимпиадах: www.olimpiada.ru
 Страница Математического праздника (задания, решения, победители)
www.mccme.ru/matprazdnik/