

Математический праздник в Математической вертикали

9 февраля 2020 года • 7 класс

Ответы, критерии и решения.

1. **Ответ:** 16 котиков.

Критерии: (правильный ответ — 3 балла, неправильный — 0 баллов)

Решение. Допустим, Артур нарисовал k котиков. Если бы Варя не торопилась на олимпиаду, то она нарисовала бы в 1,5 раза больше котиков, чем Артур: $1,5k$. Но работала она в два раза меньше времени, значит, нарисовала $1,5k/2$ котиков, а вместе с Артуром — 28. Получаем уравнение: $1,5k/2 + k = 28$, и $k = 16$. Артур нарисовал 16 котиков, а Варя — 12.

2. **Ответы:**

а) $202 \cdot 10 = 2020$ или $101 \cdot 20 = 2020$; (3 балла)

б) $2 \cdot 505 \cdot 2 = 2020$. (4 балла)

Критерии: правильный ответ — полный балл, неправильный — 0 баллов.

3. **Ответ** изображён справа снизу (последним).

Критерии: правильный ответ — 5 баллов, все остальные ответы — 0 баллов.

Решение. Покажем, как можно восстановить лабиринт. Расставим числа в таблице по указанным правилам, но во всех клетках таблицы. Сначала около выхода: достаточно одного хода, чтобы выйти, значит, ставим 1. Между 1 и 12 ставим перегородку, а слева от 1 — число 2. Между 2 и 5 перегородку, а под ними — 3 и 4, и перегородку между 3 и 12 (рис. 1). Тогда из клетки с 12 есть только путь вниз, там мы ставим 11, а между 11 и 14 — перегородку, слева от 11 — 10, между новой 10 и 3 — перегородку. Если под 4 нет перегородки, значит на клетке под ней — 5, но тогда неясно, как добираться от 10-к. Ставим перегородку под 4 (рис. 2). От 10-к до 5-ки ровно 5 шагов, значит, строим «коридор»: влево от 5 — 6, дальше вниз — 7 и 8, и вправо — 9. Между 7 и 4 ставим перегородку (рис. 3). Также, получаем «коридор» от 19 вниз — 18, 17 и 16, далее вправо — 15 (рис. 4). Продолжаем вниз — 14 (и перегородку слева), вправо — 13 и 12, и вверх — 11. Осталась угловая клетка (снизу справа) — там 13. Необходимые перегородки восстанавливаем.

19		5	2	1
		4	3	12
		10		14
17				

19		5	2	1
		4	3	12
		9	10	11
		10		14
17				

19	6	5	2	1
	7	4	3	12
	8	9	10	11
		10		14
17				

19	6	5	2	1
18	7	4	3	12
17	8	9	10	11
16	15	10		14
17				

19	6	5	2	1
18	7	4	3	12
17	8	9	10	11
16	15	10	11	14
17	14	13	12	13

19		5		
				12
		10		14
17				

4. **Ответ:** 5 мальчиков.

Критерии: правильный ответ — 5 баллов, неправильный ответ — 0 баллов

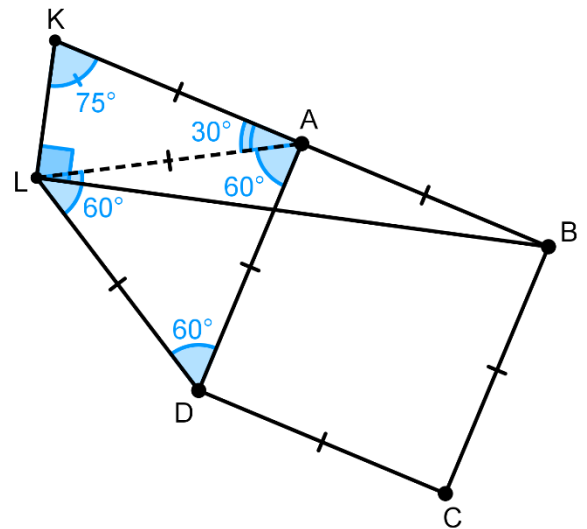
Первое решение. Можно было посчитать, что треть от всей текущей группы это $21/3 = 7$ человек. Значит, нам на хватает $7 - 4 = 3$ мальчика. Но это рассуждение неверно, потому что, добавляя в группу мальчиков, мы увеличиваем размер группы, а значит, и размер её трети. Дальше, можно было заметить, что после добавления трёх мальчиков в группу, она стала 24 человека, а значит, треть от неё это уже 8 человек. Значит, не хватает «ещё одного». Но ответ «4» тоже неправильный, так как если в группу добавить 4 мальчика, то мальчиков будет 8, а группа будет состоять из 25 человек, что означает, что треть от всей группы равна $25/3 > 8$. Наконец, добавив ещё одного, 5-го мальчика, условия для начала занятий действительно будут выполнены: в группе всего будет $21 + 5 = 26$ человек, при этом $4 + 5 = 9$ из них мальчики, а значит их действительно больше, чем треть от всей группы: $26/3 < 9$.

Второе решение: Составим уравнение. Пусть мы добавим x мальчиков. Тогда всего детей в группе станет $21 + x$. Значит, нам надо, чтобы было выполнено условие, что $\frac{1}{3} \cdot (21 + x) \leq 4 + x$. Решим это неравенство. Домножив обе части на 3 получим $21 + x \leq 12 + 3x$ и группируя x справа, а всё остальное слева получаем $9/2 \leq x$. Так как x должен быть целым, получаем, что минимальный возможный x равен 5.

5. **Ответ:** $15^\circ, 75^\circ$.

Критерии: только один любой ответ — 6 баллов, оба ответа — 8 баллов. Остальное — 0 баллов.

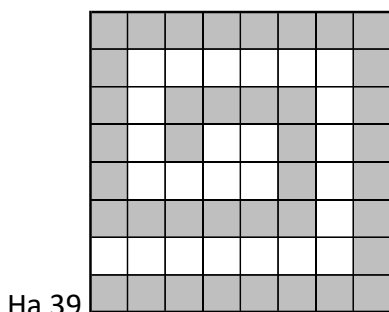
Решение. Так как треугольник KLB прямоугольный, а LA — медиана, проведённая к гипотенузе этого треугольника, она равна половине гипотенузы, то есть стороне квадрата. Получается, что треугольник ADL равнобедренный, и угол $LAD = 60^\circ$. Тогда угол $LAK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, если точка L лежит снаружи квадрата, или $\angle LAK = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, если точка лежит внутри. Треугольник LAK равнобедренный с известным углом при вершине. Значит, необходимый угол можно найти по формуле: $(180^\circ - \angle LAK)/2$, откуда получаем два искомых значения: $(180^\circ - 30^\circ)/2 = 75^\circ$, $(180^\circ - 150^\circ)/2 = 15^\circ$.



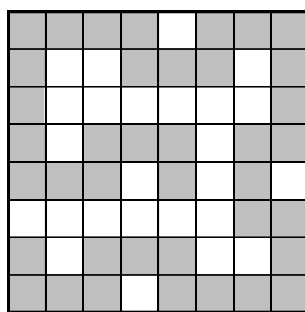
6. Разбаловка:

Длина	37	38	39	40	41	42
Баллы	2	3	4	5	6	8

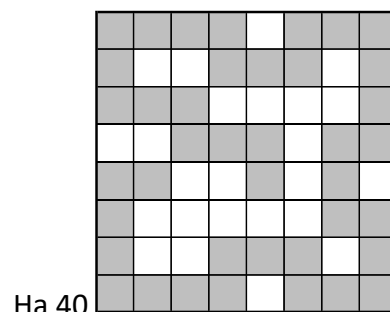
Примеры.



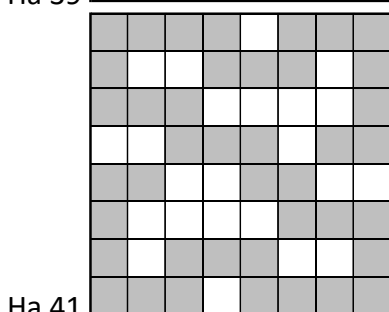
На 39



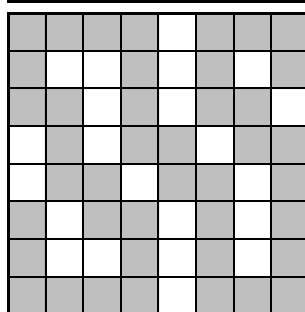
На 39



На 40



На 41



На 42