Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного математического образования

LXXXV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
27 февраля 2022 года

Задачи и решения подготовили:

Э. А. Акопян, А. Д. Блинков, М. А. Волчкевич, Т. И. Голенищева-Кутузова, А. В. Грибалко, М. А. Евдокимов, Ф. А. Ивлев, А. А. Заславский, О. А. Заславский, Т. В. Казицына, Д. А. Калинин, В. А. Клепцын, М. Б. Колодей, Т. А. Корчемкина, А. А. Марданов, Г. А. Мерзон, В. Ю. Радионов, М. А. Раскин, И. В. Раскина, Б. Р. Френкин, А. В. Хачатурян, М. А. Хачатурян, А. В. Шаповалов, В. А. Шастин, И. В. Ященко

Задачи, решения, списки победителей и призеров Математического праздника и «Математического праздника в Математической вертикали» публикуются на сайте `https://mccme.ru/matprazdnik`

В проведении Математического праздника участвуют

Московский физико-технический институт

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

НИТУ «МИСиС»

РТУ МИРЭА

школы г. Москвы

ОЦ «Сириус»

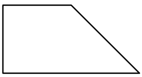
6 класс

Задача 1. Тане и Ване дали одинаковые многоугольники из бумаги. Таня отрезала от своего листа кусок, и остался квадрат. Ваня отрезал точно такой же (и по форме, и по размеру) кусок по-другому, и у него остался треугольник. Нарисуйте пример, как это могло быть. **[*4 балла*]**

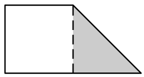
(*Т. В. Казицына*)

Ответ. Один из возможных примеров приведён на рисунках.

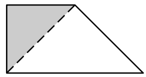
Лист бумаги



Так резала Таня



Так резал Ваня

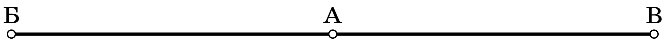


Задача 2. Три лягушки на болоте прыгнули по очереди. Каждая приземлялась точно в середину отрезка между двумя другими. Длина прыжка второй лягушки 60 см. Найдите длину прыжка третьей лягушки. **[*4 балла*]**

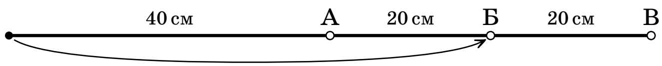
(*А. В. Шаповалов*)

Ответ: 30 см.

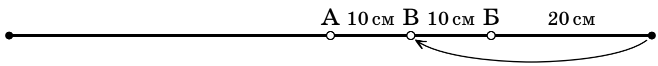
Решение. Независимо от того, как сидели лягушки вначале, после первого прыжка они будут на одной прямой, причём первая (А) посередине.



Теперь прыгает вторая лягушка (Б). Она пролетает расстояние до А и ещё половину этого расстояния, что по условию составляет 60 см. Значит, между нею и А (равно как и между А и В) было 40 см.



Итак, теперь между А и В 40 см, ровно посередине между ними находится Б, а очередь прыгать за В. Она пролетит 20 см и ещё половину этого расстояния, то есть всего 30 см.

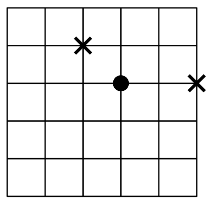


Задача 3. Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами A, B, C, D, E, F, G, H, I, J в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких различных букв. Например, если спросить «$A+B=?$», то в случае, когда $A=9$, $B=1$, $C=0$, ответом будет «$A+B=$ $=BC$». Как можно за пять таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют? **[*6 баллов*]**

(*А. А. Заславский*)

Решение. Сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому, назвав все десять букв, мы узнаем, какими буквами зашифрованы цифры 4 и 5. Исключив эти буквы и спросив про сумму остальных восьми, мы узнаем, как зашифрованы цифры 3 и 6. В каждом следующем вопросе так же будем спрашивать про сумму еще не расшифрованных букв. В результате после третьего вопроса узнаем, какими буквами зашифрованы 2 и 7, после четвёртого — 1 и 8 и, наконец, после пятого узнаем, какой из оставшихся букв зашифрована цифра 9, а какой 0.

Задача 4. Лабиринт для мышей (см. рисунок) представляет собой квадрат 5×5 метров, мыши могут бегать только по дорожкам. На двух перекрёстках положили по одинаковому куску сыра (обозначены крестиками). На другом перекрёстке сидит мышка (обозначена кружочком). Она чует, где сыр, но до обоих кусочков ей нужно пробежать одинаковое расстояние. Поэтому она не знает, какой кусочек выбрать, и задумчиво сидит на месте.

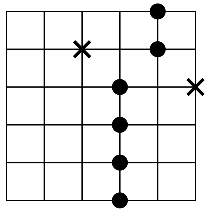


а) Отметьте ещё пять перекрёстков, где могла бы задумчиво сидеть мышка (откуда до обоих кусочков сыра ей нужно пробежать одинаковое расстояние). **[*2 балла*]**

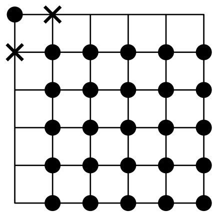
б) Придумайте, на каких двух перекрёстках можно положить по куску сыра так, чтобы подходящих для задумчивой мышки перекрёстков оказалось как можно больше.

[*до 5 баллов*]

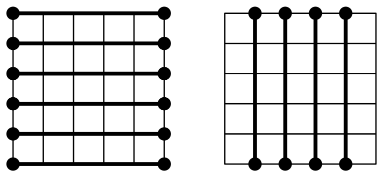
(*Т. В. Казицына*)

Ответ. а) 

б) Максимальное число мест для задумчивых мышек равно 26:



Комментарии. 1. В любом примере для пункта б) один из концов каждого из следующих 10 отрезков должен быть свободен (если отмечены оба конца, то куски сыра должны располагаться на прямой, перпендикулярной этому отрезку, а значит, подходящих мест будет ровно 6).



Отсюда можно вывести и то, что больше 26 задумчивых мышек быть не может: если один из концов свободен, то у нас есть минимум 10 не отмеченных перекрёстков.

2. Сюжет задачи отсылает к известному мысленному эксперименту, наиболее ярко описанному немецким математиком и философом рубежа XVII–XVIII веков Готфридом Вильгельмом Лейбницем: «Голодный осёл, оказавшийся на одинаковом расстоянии от двух совершенно одинаковых охапок сена, умрёт с голоду, так и не выбрав, какую съесть». Этот эксперимент придуман не Лейбницем, он встречается и у других философов, рассуждавших о свободе выбора — у нидерландского философа XVII века Бенедикта Спинозы и даже у древнегреческого учёного Аристотеля в его трактате «О небе», где он иронически приведён в споре с софистами, в качестве примера абсурдного

умозаключения. А самого осла обычно называют буридановым в честь французского философа XIV века Жана Буридана. Выражение «буриданов осёл» вошло в язык как обозначение нерешительного, сомневающегося, колеблющегося человека.

Задача 5. Среди 20 школьников состоялся турнир по теннису. Каждый участник проводил каждый день по одной встрече; в итоге за 19 дней каждый сыграл ровно по одному разу со всеми остальными. Теннисный корт в школе один, поэтому матчи шли по очереди. Сразу после своего первого выигрыша в турнире участник получал фирменную майку. Ничьих в теннисе не бывает. Петя стал одиннадцатым участником, получившим майку, а Вася — пятнадцатым. Петя получил свою майку в одиннадцатый день турнира. А в какой день получил майку Вася?

[*7 баллов*] (*Б. Р. Френкин*)

Ответ. Тоже в одиннадцатый.

Решение. В первый день прошло 10 встреч, и, стало быть, было выдано 10 маек. Одиннадцатая майка была выдана лишь в одиннадцатый день турнира, то есть у Пети и ещё девяти участников в первые десять дней турнира не было ни одной победы. Это возможно только в том случае, когда эти участники (назовем их невезучими) в эти дни не играли друг с другом, то есть каждый из них сыграл с десятью остальными участниками (теми, кому в первый день досталась майка) и всем им проиграл. Но тогда в оставшиеся дни невезучие будут играть между собой. В частности, в одиннадцатый день они разобьются на пять пар, и победители этих пар получат майки с номерами с 11 по 15.

Задача 6. Шеренга солдат-новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, остальные — направо. Оказалось, что в затылок соседу смотрит в шесть раз больше солдат, чем в лицо. Затем по команде «кругом» все развернулись в противоположную сторону. Теперь в затылок соседу стали смотреть в семь раз больше солдат, чем в лицо. Сколько солдат в шеренге? [*8 баллов*] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 98.

Решение. Будем считать, что сержант построил шеренгу солдат между двумя столбами. После первой команды каждый новобранец смотрит либо в затылок соседу, либо в лицо, кроме двух солдат с краю, которые могут смотреть на столбы.

Если солдат смотрит в затылок соседу, то после разворота этот сосед будет смотреть в затылок ему. Поэтому число смотрящих в затылок не поменяется.

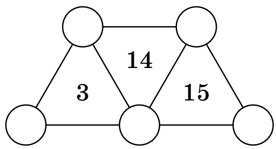
Крайний солдат, смотревший на столб, после разворота не будет этого делать; напротив, если он не смотрел на столб, то после разворота будет. Таким образом, количество смотрящих на столб либо не изменится (был 1 и останется 1), либо увеличится на 2 (было 0, станет 2), либо уменьшится на 2 (было 2, станет 0).

Так как общее число солдат постоянно, число смотрящих в лицо также либо не изменится, либо увеличится или уменьшится на 2.

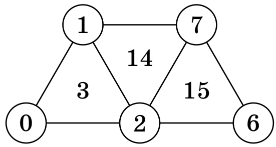
По условию, число солдат, смотрящих в лицо, сначала составляло шестую часть числа смотрящих в затылок, а потом седьмую часть. Значит, их количество уменьшилось (и, стало быть, уменьшилось на 2). С другой стороны, оно изменилось на $1/6 - 1/7 = 1/42$ от неизменного числа смотревших в затылок. То есть смотревших в затылок было $2 \cdot 42 = 84$ человека, а смотревших в лицо друг другу до разворота было $84 : 6 = 14$. Смотрящих на столбы при этом не было. Таким образом, общее число новобранцев $84 + 14 = 98$.

7 класс

Задача 1. Ваня расставил в кружках различные цифры, а внутри каждого треугольника записал либо сумму, либо произведение цифр в его вершинах. Потом он стёр цифры в кружочках. Впишите в кружочки различные цифры так, чтобы условие выполнялось. [***4 балла***] (*В. А. Клепцын*)



Ответ.



Комментарий. Найти этот ответ и заодно доказать его единственность можно так. Число 3 не может быть получено как произведение трёх различных чисел, значит, оно получено как сумма $0+1+2$. Тогда число 14 уже не может быть получено как сумма: две «общие» с числом 3 цифры в сумме дадут максимум 3, и ещё одной цифры, чтобы набрать 14, не хватит. Значит, 14 получено как произведение: $1 \cdot 2 \cdot 7$.

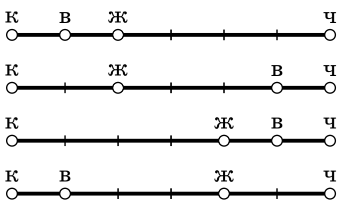
Тогда число 15 получено с использованием 7 и 1 или 7 и 2 — в частности, получено как сумма. Вариант 7 и 1 невозможен: третьей цифрой должна быть $15-1-7=7$, а она уже использована. Значит, 15 составлено как $2+7+6$.

Задача 2. Доктор Айболит хочет навестить и корову, и волчицу, и жучка, и червячка. Все четверо живут вдоль одной прямой дороги. Орлы готовы утром доставить Айболита к первому пациенту, а вечером забрать от последнего, но три промежуточных перехода ему придётся сделать пешком. Если Айболит начнёт с коровы, то длина его кратчайшего маршрута составит 6 км, если с волчицы — 7 км, а если с жучка — 8 км.

Нарисуйте, как могли располагаться домики коровы, волчицы, жучка и червячка (достаточно одного примера расположения). **[*4 балла*]**

(*И. В. Ященко, И. В. Раскина*)

Ответ. На рисунке показаны 4 возможных варианта (на отрезке разметка по 1 км; мы рисуем схему так, что корова левее червячка):



Комментарий. Куда бы ни доставили орлы Айболита, ему нужно посетить два крайних домика. Значит, любой его маршрут не меньше, чем расстояние между ними, а маршрут с началом в одном из крайних домиков как раз равен расстоянию между крайними домиками.

То есть это расстояние является наименьшим и должно быть одинаковым для двух животных. Следовательно, оно равно 6 км, и корова и червячок живут в крайних домиках, а волчица и жучок — где-то между ними. Остаётся заметить, что поскольку маршрут Айболита с началом в домике волчицы занимает 7 км, волчица живёт в 1 км от любого из крайних домиков, а жучок, аналогично, в 2 км.

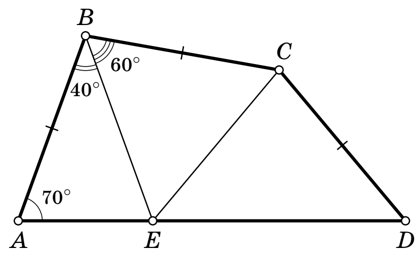
Задача 3. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

Задача 4. См. задачу 4 для 6 класса (с. 4).

Задача 5. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, $\angle A = 70^\circ$ и $\angle B = 100^\circ$. Чему могут быть равны углы C и D? **[*8 баллов*]** (*М. А. Волчкевич*)

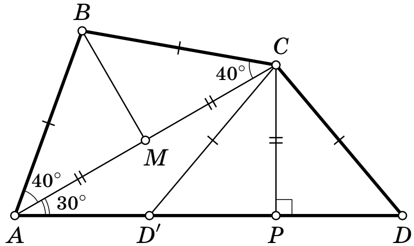
Ответ. 60° и 130° или 140° и 50°.

Первое решение. Проведём отрезок BE так, что точка E лежит на AD, а угол ABE равен 40°. Тогда $\angle AEB = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ$, следовательно, треугольник ABE равнобедренный, $AB = BE$. Рассмотрим треугольник BCE: $\angle CBE = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$ и $BE = AB = BC$, значит, треугольник BCE равносторонний, и $CE = BC = AB$. А это означает, что четырёхугольник $ABCE$ подходит под условие, и один из возможных ответов — угол C такого четырёхугольника равен 60°, и оставшийся угол равен $\angle AEB + \angle BEC = 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ$.



Заметим, что для любой точки D' на отрезке AE справедливо $CD' > CE = BC$ (так как CD' — наибольшая сторона в тупоугольном треугольнике CED'). Пусть точка D лежит на луче AE за точкой E, $CD = BC = CE$. Тогда $\angle CED = 180^\circ - \angle AEB - \angle BEC = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$, и, поскольку $CE = CD$, $\angle CDE = \angle CED = 50^\circ$, а значит, $\angle ECD = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$ и $\angle BCD = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$.

Второе решение. В равнобедренном треугольнике ABC угол ABC равен 100°, значит, $\angle BAC = \angle ACB = 40^\circ$, и тогда $\angle CAD = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$. Отметим середину M отрезка AC и основание P перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD. Тогда в прямоугольном треугольнике ACP против угла в 30° лежит катет CP, значит, $CP = \frac{1}{2}AC = CM$. Следовательно, прямоугольные треугольники BCM и DCP равны по катету и гипотенузе, значит, $\angle CDP = \angle MBC = 50^\circ$, т.е. в зависимости от того, лежит точка P внутри отрезка AD или снаружи, либо угол ADC, либо смежный с ним равен 50°. Соответственно, в первом случае $\angle ADC = 50^\circ$ и $\angle BCD = 140^\circ$, а во втором случае $\angle AD'C = 130^\circ$ и $\angle BCD' = 60^\circ$.



Задача 6. См. задачу 6 для 6 класса (с. 6).

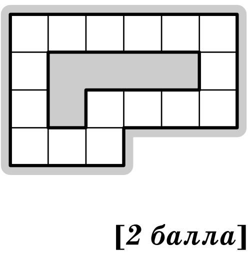
Задача 1. Электронные часы показывают время: часы, минуты и секунды, например 18:00:00. Однажды на часах две цифры погасли, и остались только цифры 2, 0, 2, 2 (именно в таком порядке). Назовите самый поздний момент в сутках, когда это могло произойти. **[*3 балла*]**

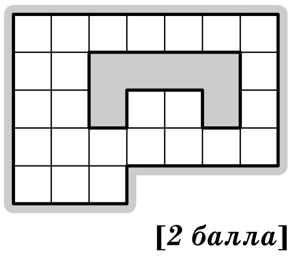
(*Д. А. Калинин*)

Ответ. 23:50:22.

Решение. Самое позднее время, которое могут показывать электронные часы, 23:59:59. Если посмотреть на время как на шестизначное число, то два момента времени сравниваются так же, как и обычные числа: время тем больше, чем больше первая цифра; если первые цифры совпадают, сравнивают вторую и т. д. Поэтому постараемся сохранить от 23:59:59 как можно больше цифр в начале. Максимум можно оставить три первых цифры, так как иначе останется больше двух цифр, отличных от 2 и 0. Пробуем найти время, начинающееся на 23:5*:**. Цифры 3 и 5 должны обязательно погаснуть, значит, оставшиеся должны быть 2, 0, 2, 2 именно в таком порядке, т. е. часы должны показывать: 23:50:22.

Задача 2. Дана бумажная клетчатая фигура с дыркой (см. рисунок). Покажите, как разрезать эту фигуру на две части таким образом, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат. Части можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

а) 

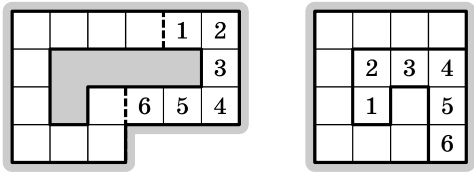
б) 

[*2 балла*] **[*2 балла*]**

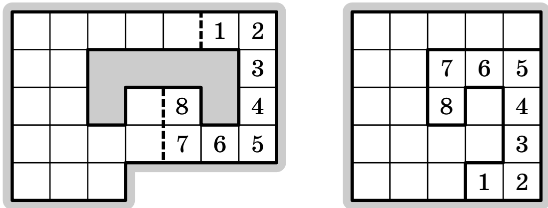
(*М. А. Евдокимов*)

Ответ. На рисунках ниже для каждого из пунктов приведено необходимое разрезание.

а)



б)



Задача 3. Найдите шестизначное число, у которого первая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё и вторая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё. **[*4 балла*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 769999.

Первое решение. Сумма пяти последних цифр числа по условию делится нацело на 6 (частное равно первой цифре). Сумма четырех последних цифр числа также делится нацело на 6 (частное равно второй цифре). Поэтому вторая цифра, как разность двух чисел, делящихся на 6, также делится на 6. Значит, вторая цифра 0 или 6. Если она равна 0, то и сумма последних четырех цифр также равна 0, а значит, и первая цифра равна 0, но шестизначное число с нуля начинаться не может. То есть этот вариант не подходит, и вторая цифра равняется 6. Тогда сумма последних четырех цифр равняется $6 \cdot 6 = 36$, а значит, все они равны 9. Наконец сумма последних пяти цифр равняется 42, и следовательно, первая цифра равняется $42 : 6 = 7$. Тем самым искомое число — это 769999.

Второе решение. Сумма последних 4 цифр в 6 раз больше, чем вторая цифра, значит, сумма последних 5 цифр равна 7 вторым и равна 6 первым цифрам. Следовательно, 7 вторых цифр равны 6 первым, а значит, первая цифра равна 7, а вторая равна 6; тогда сумма последних четырёх равна 36, а это достижимо, только если все 4 последние цифры — девятки.

Комментарий. Можно решить задачу, перебрав все возможные варианты (от 0 до 9) значения второй цифры числа. Например, если эта цифра равна 9, то сумма цифр правее неё в 6 раз больше, т. е. $9 \cdot 6 = 54$, но тогда сумма всех цифр правее первой равна $9 + 54 = 63$. Так как число 63 не делится на 6, вариант, что вторая цифра 9, не подходит, и т. д.

Задача 4. Три лягушки сидели на одной прямой. Вначале прыгнула одна из них, потом другая, а затем и третья. Каждая лягушка приземлялась точно в середину отрезка между двумя другими. Оказалось, что длины двух из этих трёх прыжков равны 60 см.

а) Какой могла быть длина оставшегося прыжка?

[*2 балла*]

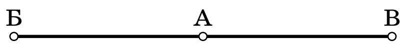
б) Каким могло быть расстояние между двумя крайними лягушками изначально? **[*4 балла*]**

(*А. В. Шаповалов*)

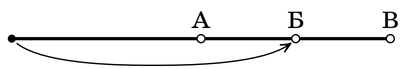
Сравните с задачей 2 для 6 класса (с. 3).

Ответ. а) 30 см или 120 см; б) 100 см или 160 см.

Решение. Независимо от первоначального взаимного расположения лягушек, после первого прыжка первая лягушка (А) приземлится точно в середину отрезка между двумя другими.



Дальше прыгнет одна из лягушек, сидящих в конце этого отрезка (пусть лягушка Б). Она пролетит половину его длины и ещё четверть, т.е. всего 3/4 его длины. Теперь лягушки будут сидеть так:

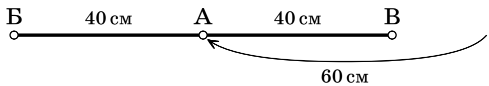


Заметим, что расстояние между крайними лягушками равнялось длине БВ, а теперь вдвое меньше (АВ — половина от исходного отрезка БВ).

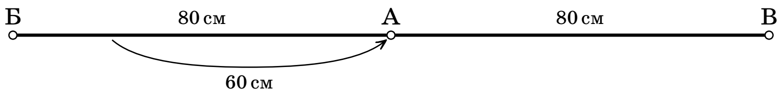
Третий прыжок будет обладать тем же свойством: его длина составит 3/4 от длины текущего отрезка (АВ), а расстояние между крайними лягушками вновь сократится вдвое.

Из сказанного следует, что длина третьего прыжка заведомо меньше длины второго. Поэтому совпасть могут либо длины первого и второго прыжков, либо первого и третьего. Разберём оба случая.

1) Длины первого и второго прыжков равны 60 см. Следовательно, расстояние между крайними лягушками перед вторым прыжком было равно $60:3\cdot4=80$ см, а после этого прыжка станет $80:2=40$ см. Тогда длина третьего прыжка будет 3/4 от 40 см, т. е. 30 см, а исходное расстояние между крайними лягушками будет равно $60+40=100$ см (лягушка А первоначально находилась на расстоянии 60 см от середины отрезка длиной 80 см).



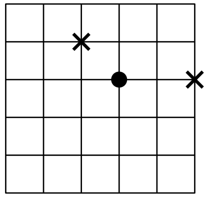
2) Длины первого и третьего прыжков равны 60 см. Следовательно, расстояние между двумя крайними лягушками перед третьим прыжком было $60:3\cdot4=80$ см. Значит, перед вторым прыжком расстояние между крайними лягушками было в два раза больше — 160 см. А так как первая лягушка прыгнула всего на 60 см, то она находилась где-то внутри этого отрезка.



Поэтому исходное расстояние между крайними лягушками (перед первым прыжком) тоже было равно 160 см.

Итак, оба рассмотренных случая возможны. В первом исходное расстояние между крайними лягушками 100 см, а длины прыжков равны 60 см, 60 см, 30 см. Во втором исходное расстояние между крайними лягушками равно 160 см, а длины прыжков равны 60 см, 120 см, 60 см.

Задача 5. Лабиринт для мышей (см. рисунок) представляет собой квадрат 5×5 метров, мыши могут бегать только по дорожкам. На двух перекрёстках положили по одинаковому куску сыра (обозначены крестиками). На другом перекрёстке сидит мышка (обозначена кружочком). Она чует, где сыр, но до обоих кусочков ей нужно пробежать одинаковое расстояние. Поэтому она не знает, какой кусочек выбрать, и задумчиво сидит на месте.



а) Отметьте ещё один перекрёсток, где могла бы задумчиво сидеть мышка (расстояние по дорожкам до обоих кусочков сыра одинаковое). **[*1 балл*]**

б) Найдите все 6 перекрёстков, где могла бы сидеть такая мышка (включая найденные ранее). **[*2 балла*]**

в) Придумайте, на какие два перекрёстка можно переложить куски сыра так, чтобы подходящих мест для задумчивой мышки оказалось как можно больше.

[*до 5 баллов*] (*Т. В. Казицына*)

Решение. См. задачу 4 для 6 класса (с. 4).

Задача 6. Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами A, B, C, D, E, F, G, H, I, J в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких различных букв. Например, если спросить «$A+B=?$», то в случае, когда $A=9$, $B=1$, $C=0$, ответом будет «$A+B=BC$». Как можно за несколько таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют? Постарайтесь обойтись как можно меньшим числом вопросов (жюри умеет за 5 вопросов). **[*до 8 баллов*]** (*А. А. Заславский*)

Решение. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

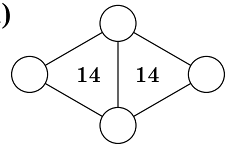
Комментарий. Если не ограничивать себя в количестве вопросов, то выяснить, какой буквой какая цифра закодирована, можно и без вопроса про общую сумму цифр. Например, можно всё время спрашивать только про пары цифр. Так, перебирая по очереди суммы разных пар цифр, в какой-то момент мы получим в ответе двузначное число. Такое число может начинаться только на 1 (сумма двух однозначных чисел меньше 20).

Таким образом, в этот момент мы определим, какая буква кодирует цифру 1. Далее, складывая найденную 1 с каждой из оставшихся букв, мы выясним какая из них кодирует цифру 9 (та, что в сумме с 1 даст двузначное число), а значит, выясним и 8 (та цифра, что в сумме с 1 даст 9). Определив 8, выясним 7 (та цифра, что в сумме с 1 даст 8) и так далее. В итоге определим все цифры.

7 класс в Математической вертикали

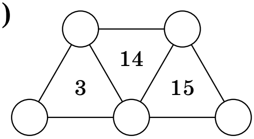
Задача 1. На рисунке изображены два кодовых замка. Замок откроется, если вписать в кружочки различные цифры так, чтобы число внутри каждого из треугольников совпало или с суммой, или с произведением цифр в его вершинах. Какая комбинация из а) четырёх б) пяти различных цифр откроет замок?

а)



[*1 балл*]

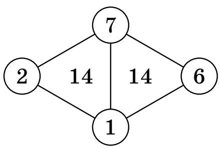
б)

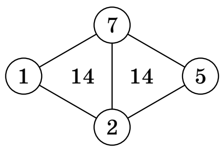


[*3 балла*]

(*В. А. Клепцын*)

Ответ. а) На рисунке приведены два возможных набора цифр, открывающих замок. В каждом из примеров можно верхнее число поменять местами с нижним, а правое с левым.





Комментарий. В обоих треугольниках стоит число 14. Цифры в кружочках не должны повторяться, при этом две из трёх цифр у этих треугольников общие, поэтому в одном из треугольников 14 должно означать сумму, а в другом — произведение. 14 в виде произведения можно представить только как $1 \cdot 2 \cdot 7$. Посмотрим, какие из этих цифр могут быть общими со вторым треугольником. Это не могут быть 1 и 2, так как никакая третья цифра не дотянет их сумму до 14. Значит, это либо 2 и 7, либо 1 и 7. В первом случае оставшееся число равно $14-(1+7)=6$, во втором $14-(2+7)=5$.

б) См. задачу 1 для 7 класса (с. 7).

Задача 2. См. задачу 2 для 6 класса в Математической вертикали (с. 11).

Задача 3. См. задачу 2 для 7 класса (с. 8).

Задача 4. На быстрой зарядке телефон полностью заряжается за 1 час 20 минут, а на обычной — за 4 часа. Федя поставил полностью разряженный телефон сначала на обычную зарядку, а потом, когда нашёл нужный блок, переставил на быструю до окончания зарядки. Найдите общее время зарядки телефона, если известно, что на быстрой зарядке телефон находился одну треть от общего времени зарядки. Считайте, что и при быстрой, и при обычной зарядке телефон заряжается равномерно. **[*6 баллов*]**

(*на основе задачи 7.3 Матпраздника 2007 года*)

Ответ. 144 минуты = 2 часа 24 минуты.

Решение. Так как быстрая зарядка длится 1 ч 20 мин, то есть 80 мин, то за 1 минуту быстрой зарядки телефон заряжается на 1/80 от полного заряда. При обычной зарядке, которая длится 4 ч, то есть 240 мин, за 1 минуту телефон заряжается на 1/240 от полного заряда.

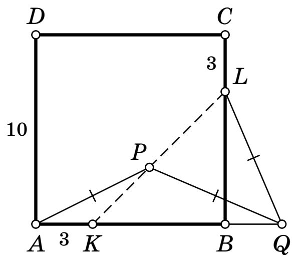
Обозначим общее время зарядки телефона в минутах через t. Тогда $t/3$ — время, которое шла быстрая зарядка, и $2t/3$ — время, которое шла обычная зарядка. За время быстрой зарядки телефон зарядился на $\frac{t}{3}\cdot\frac{1}{80}=\frac{t}{240}$ от полного заряда. За время обычной зарядки — на $\frac{2t}{3}\cdot\frac{1}{240}=\frac{t}{360}$ от полного заряда. Так как по окончании зарядки телефон оказался полностью заряженным, то можно составить уравнение $\frac{t}{240}+\frac{t}{360}=1$, решая которое, находим

$$t=\frac{1}{\frac{1}{240}+\frac{1}{360}}=\frac{1}{\frac{3}{720}+\frac{2}{720}}=\frac{720}{5}=144.$$

Задача 5. См. задачу 5 для 6 класса в математической вертикали (с. 15).

Решение. См. задачу 4 для 6 класса (с. 4).

Задача 6. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ со стороной, равной 10, отмечены точки K и L соответственно так, что $AK = CL = 3$. На отрезке KL выбрали точку P, а на продолжении отрезка AB за точку B выбрали точку Q так, что $AP = PQ = QL$ (см. рис.).



а) Докажите, что $\angle PAB = \angle BLQ$. **[*4 балла*]**

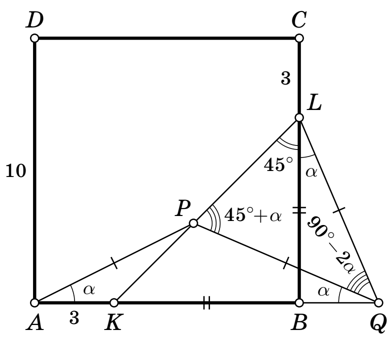
б) Найдите длину отрезка BQ. **[*4 балла*]**

* При решении пункта б) можно пользоваться утверждением пункта а). (*Ф. А. Ивлев, А. А. Марданов*)

а) **Решение.** Заметим, что $KB = AB - AK = 10 - 3 = BC - LC = BL$. Следовательно, треугольник KBL равнобедренный и прямоугольный, откуда $\angle KLB = 45^\circ$.

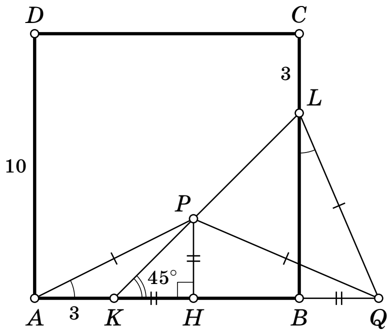
Обозначим угол BLQ через α. Так как треугольник PQL равнобедренный, получаем $\angle LPQ = \angle PLQ = 45^\circ + \alpha$. Из суммы углов треугольника PQL находим $\angle PQL = 180^\circ - 2 \cdot (45^\circ + \alpha) = 90^\circ - 2\alpha$.

По сумме углов треугольника BLQ находим, что $\angle LQB = 90^\circ - \alpha$. Теперь находим $\angle PQA = \angle LQA - \angle LQP = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - 2\alpha) = \alpha$. Наконец, так как треугольник APQ равнобедренный, то $\angle PQA = \angle PAQ = \alpha = \angle BLQ$, что и требовалось доказать.



б) **Ответ.** $BQ = 4$.

Решение. Опустим из точки P высоту PH на сторону AB. Так как треугольник KBL равнобедренный и прямоугольный, то $\angle PKH = 45°$. Следовательно, треугольник KPH тоже равнобедренный и $KH = HP$.



Заметим, что прямоугольные треугольники APH и LQB равны по гипотенузе ($AP = LQ$) и острому углу ($\angle PAH = \angle BLQ$). Следовательно, $KH = PH = BQ$.

Так как PH — высота в равнобедренном треугольнике APQ, проведённая к его основанию, то она же является и медианой. Тогда $AH = HQ$ и можно записать следующее соотношение:

$$AB + BQ = AQ = 2AH = 2(AK + KH) = 2(AK + BQ),$$
$$10 + BQ = 2(3 + BQ) = 6 + 2BQ,$$

откуда $BQ = 4$.