LXXXVI Московская
математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
19 февраля 2023 года

Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Факультет математики
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

Задачи и решения подготовили:

Э. Акопян, А. Блинков, М. Волчкевич, Г. Гальперин, Т. Голенищева-Кутузова, А. Грибалко, С. Дориченко, М. Евдокимов, П. Закорко, А. Заславский, Т. Казицына, В. Клепцын, М. Колодей, Т. Корчемкина, Г. Мерзон, Г. Минаев, Л. Попов, В. Радионов, М. Раскин, И. Раскина, В. Соколова, Б. Френкин, А. Хачатурян, М. Хачатурян, А. Шаповалов, И. Ященко

☞ Задачи, решения, списки победителей и призёров Математического праздника и «Математического праздника в Математической вертикали» публикуются на сайте https://mccme.ru/matprazdnik

6 класс

Задача 1. На доске написаны две суммы:

$$1 + 22 + 333 + 4444 + 55555 + 666666 + 7777777 + \\ + 88888888 + 999999999$$

$$9 + 98 + 987 + 9876 + 98765 + 987654 + 9876543 + \\ + 98765432 + 987654321$$

Определите, какая из них больше (или они равны).

[*4 балла*] (*Г. Гальперин*)

Ответ. Суммы равны.

Решение. Запишем обе суммы столбиком, причём вторую для большей наглядности в обратном порядке. В обеих суммах в разряде единиц будут складываться цифры от 1 до 9, в разряде десятков — цифры от 2 до 9, в разряде сотен — цифры от 3 до 9 и так далее. И цифра, получающаяся в каждом разряде, и перенос в старший разряд окажутся в обоих случаях одинаковыми. Поэтому и результат сложения будет один и тот же.

$$\begin{array}{cr} & {}^{4}\\ & 1\\ & 22\\ & 333\\ & 4444\\ + & 55555\\ & 666666\\ & 7777777\\ & 88888888\\ & 999999999\\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cr} & {}^{4}\\ & 987654321\\ & 98765432\\ & 9876543\\ & 987654\\ + & 98765\\ & 9876\\ & 987\\ & 98\\ & 9\\ \hline & 5 \end{array}$$

Обе суммы, конечно, можно непосредственно вычислить, получается 1097393685. Но это достаточно трудоёмкий и неинтересный путь.

Комментарий. Можно представить себе, как цифры во втором примере «падают вниз», и второй пример превращается в первый.

Задача 2. Вася в течение 10 дней решал задачи — каждый день хотя бы одну. Каждый день (кроме первого), если погода была пасмурная, то он решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а если солнечная — на одну задачу меньше. За первые 9 дней Вася решил 13 задач. Какая погода была на десятый день? **[*5 баллов*]**

(*Б. Френкин*)

Ответ. Пасмурная.

Решение. Рассмотрим любые два дня, идущие подряд. Каждый день решено хотя бы по одной задаче, но ровно по одной оба дня быть не может, значит, за эти два дня решено минимум три задачи. Таким образом, за первые 8 дней Вася решил как минимум $4 \cdot 3 = 12$ задач. Если бы он за девятый день решил хотя бы две задачи, число решённых за 9 дней задач превысило бы 13. Так что за 9-й день была решена ровно одна задача. На 10-й день погода была пасмурной (и Вася решил две задачи), в противном случае он бы решил в этот день 0 задач, а по условию это не так.

Можно привести пример, как такое могло быть: Вася за эти 10 дней последовательно решал 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 задачи. Нетрудно доказать, что этот пример единственен. В самом деле, доказательство, что Вася решил за 9-й день ровно одну задачу, применимо к любому нечётному дню.

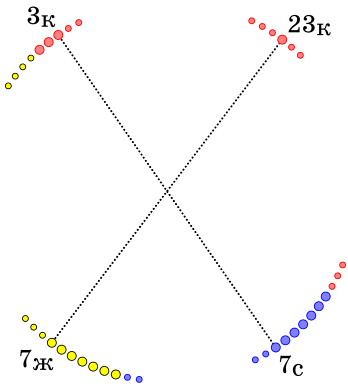
Комментарий. Казалось бы, ответ на вопрос можно было бы дать, вообще не учитывая ни сколько было дней, ни сколько всего решено задач. Действительно, пасмурная погода в последний день ничему противоречить не может, а солнечная может, причём ровно в том случае, когда в предпоследний день решена ровно одна задача. А раз нас просят определить погоду в последний день, то ответ «пасмурная». Тем не менее, такое рассуждение не может считаться решением, так как исходит из неявного предположения, что на задачу можно дать однозначный ответ.

Задача 3. Сто сидений карусели расположены по кругу через равные промежутки. Каждое покрашено в жёлтый, синий или красный цвет. Сиденья одного и того же цвета расположены подряд и пронумерованы 1, 2, 3, ... по часовой стрелке. Синее сиденье № 7 противоположно красному

№ 3, а жёлтое № 7 — красному № 23. Найдите, сколько на карусели жёлтых сидений, сколько синих и сколько красных. **[*6 баллов*]** (*А. Шаповалов*)

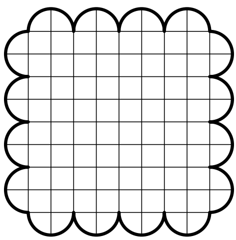
Ответ. Жёлтых 34, синих 20, красных 46.

Решение. Между 3-м и 23-м красными расположено 19 сидений, значит, между 7-м синим и 7-м жёлтым их столько же. Это первые шесть жёлтых сидений и, стало быть, $19 - 6 = 13$ синих с номерами, бо́льшими 7. Отсюда находим, что синих сидений $7 + 13 = 20$.



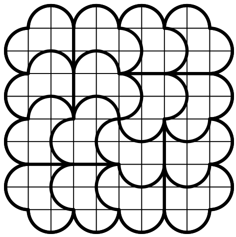
Проходя полкруга по часовой стрелке от 3-го красного к 7-му синему сиденью, мы минуем (не считая этих двух) $(100 - 2) : 2 = 49$ сидений. Шесть из них синие, а остальные $49 - 6 = 43$ — красные. Поэтому всего красных сидений $3 + 43 = 46$. Количество жёлтых сидений $100 - 20 - 46 = 34$.

Задача 4. Разрежьте «печенье» на 16 равных частей (т. е. одинаковых по размеру и по форме). Разрезы не обязательно прямолинейные.

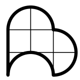


[*6 баллов*]
(*Т. Голенищева-Кутузова*)

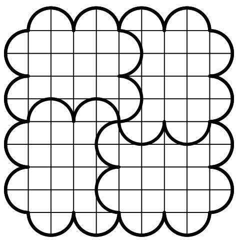
Решение.



Комментарий. Как можно придумать разрезание? В «печенье» 64 клеточки и 16 полукругов по краям. Значит, в каждой части скорее всего будет полукруг и 4 клеточки, но тогда откуда внутри фигуры (не на границе) появятся полукруги? Вероятно, придётся делать полукруглые разрезы — но тогда у фигурок будут не только выпуклые полукруги, но и вогнутости в виде полукруга. Из соображений площади получается одна вогнутость и две выпуклости. Таких фигурок бывает две разных, одна из них подходит:

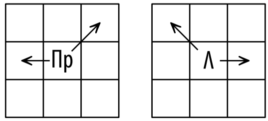


Можно неформально рассуждать и так. Фигура имеет центр и две оси симметрии и поэтому искомое разрезание можно попытаться получить, ведя из центра к краю печенья четыре одинаковые линии разреза (каждый разрез получается из предыдущего поворотом на 90°). Прямыми эти линии быть не должны, попробуем дуги окружности и получим вот такой рисунок:



Каждую из получившихся одинаковых четвертушек печенья уже не очень сложно разрезать на четыре фигурки, описанные выше.

Задача 5. Фигура «скрипач» бьёт клетку слева по стороне (локтем) и справа вверху по диагонали (смычком), если он правша, и, наоборот, правую клетку по стороне и левую верхнюю по диагонали, если левша (все скрипачи сидят лицом к нам). Посадите как можно больше «скрипачей» в «оркестр» 8×8 клеток, чтобы они не били друг друга. (Вы можете использовать любое количество как правшей, так и левшей.)



так бьёт правша   а так левша

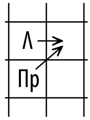
[*до 7 баллов*]

(*М. Хачатурян*)

Решение. Разместить 32 скрипача несложно: например, можно заполнить четыре столбца через один (неважно, правшами или левшами). Однако можно разместить и больше. Возможный пример с 34 скрипачами приведён на рисунке.

Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		Пр
Л		Пр	Л		Пр		Л

Комментарий. Можно доказать, что более 34 скрипачей разместить не удастся. В самом деле, рассмотрим вертикальную полосу шириной в две клетки. Всякий скрипач, стоящий в этой полосе и при этом не в верхней строке, бьёт одну какую-то клетку в этой же полосе. Мы можем поставить эту пустую клетку в соответствие данному скрипачу. Если при этом оказалось, что два скрипача бьют одну и ту же пустую клетку (возможны два аналогичных друг другу варианта этого, один из них показан на рисунке), то клетка, расположенная под дважды побитой, тоже обязана быть пустой, поэтому её можно поставить в соответствие одному из двух скрипачей, допустим, нижнему. Если же эту клетку бьёт смычком скрипач, стоящий ещё ниже, поставим ему в соответствие соседнюю с ним по горизонтали клетку (она заведомо пустая), и так далее.



Итак, в полосе может быть максимум 9 скрипачей — двое в верхних клетках и ещё семеро в оставшихся 14 клетках, потому что каждому скрипачу там соответствует пустая клетка, то есть занятых клеток не более половины.

Однако две полосы с девятью скрипачами не могут соседствовать, иначе в верхней строке четыре скрипача сидели бы подряд. Поэтому таких полос не более двух, в оставшихся двух полосах максимум по 8 скрипачей, так что всего в оркестре не более чем $9 + 9 + 8 + 8 = 34$ музыканта.

Задача 6. Кащей заточил в темницу толпу пленников и сказал им: «Завтра вам предстоит испытание. Я выберу нескольких из вас (кого захочу, но минимум троих), посажу за круглый стол в каком-то порядке (в каком пожелаю) и каждому на лоб наклею бумажку с нарисованной на ней фигуркой. Фигурки могут повторяться, но никакие две разные фигурки не будут наклеены на одинаковое число людей. Каждый посмотрит на фигурки остальных, а своей не увидит. Подавать друг другу какие-то знаки запрещено. После этого я наклейки сниму и велю всех развести по отдельным камерам. Там каждый должен будет на листе бумаги нарисовать фигурку. Если хоть один нарисует такую, какая была у него на лбу, всех отпущу. Иначе останетесь здесь навечно».

Как пленникам договориться действовать, чтобы спастись? **[*8 баллов*]**

(*Т. Голенищева-Кутузова, Т. Казицына*)

Решение. Поскольку разных фигурок разное количество, какая-то фигурка использована больше остальных. Назовём её *главной*. Если фигурок любой другой формы хотя бы на две меньше, то каждый пленник видит, какая фигурка главная. Если все нарисуют её, среди них будут и угадавшие верно.

Пусть это не так и, например, главная фигурка — квадрат, следующая по числу — круг, причём кругов ровно на один меньше, чем квадратов. Тогда пленники с квадратами на лбу будут видеть одинаковое количество кругов и квадратов и не смогут определить наверняка главную фигурку (остальные, как и раньше, будут видеть, какая фигурка главная, и могут нарисовать её). Для этого случая есть несколько спасительных алгоритмов.

Первый — из двух кандидатов в главные фигурки назвать ближайшую по часовой стрелке. Докажем, что хоть кто-то угадает. Будем учитывать только квадраты и круги, игнорируя остальных пленников. Может ли после каждого квадрата по часовой стрелке следовать круг? Нет, так как квадратов больше. Тот пленник с квадратом, после которого по часовой стрелке следует квадрат, угадает и всех спасёт.

Работает и противоположный алгоритм: из двух кандидатов в главные фигурки называть не ту, которая ближе всего по часовой стрелке. Для доказательства тоже рассмотрим лишь круги и квадраты. Как минимум в одном месте после пленника с квадратом следует по часовой стрелке пленник с кругом. Этот пленник с квадратом верно нарисует свою фигурку.

7 класс

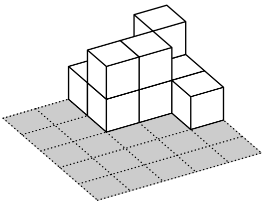
Задача 1. Аня называет дату красивой, если все 6 цифр её записи различны. Например, 19.04.23 — красивая дата, а 19.02.23 и 01.06.23 — нет. А сколько всего красивых дат в 2023 году? [*4 балла*] (*М. Евдокимов*)

Ответ. 30.

Решение. Цифры 2 и 3 уже участвуют в номере года, поэтому из всех месяцев нужно рассмотреть только 01, 04, 05, 06, 07, 08, 09 и 10. В каждом из этих номеров есть 0, поэтому в красивой дате не будет дня с номером, начинающимся с 0, 2 и 3, а также не будет дней 10, 11, 12 и 13 — остаются только 6 дней, с 14 по 19. Но тогда в каждом месяце красивая дата начинается с 1, и подходят только 6 месяцев, с 04 по 09. Остаётся заметить, что для каждого подходящего месяца ровно один день, оканчивающийся на ту же цифру, не будет красивым — значит, в каждом из 6 месяцев по 5 красивых дат, а всего в 2023 году — 30.

Задача 2. Посреди пустого бассейна стоит квадратная платформа 50×50 сантиметров, расчерченная на клеточки 10×10 см. На клетки платформы Лена ставит башенки из кубиков $10 \times 10 \times 10$ см. Потом Таня включает воду.

Если высоты башенок были такие, как в таблице справа, то при уровне воды 5 см был 1 остров, при уровне воды 15 см было два острова (если острова «граничат по углу», то считаются отдельными островами), а при уровне воды 25 см все башенки оказались закрыты водой и стало 0 островов.



0	0	1	1	2
0	0	2	2	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Придумайте, какие башенки из кубиков можно поставить, чтобы количество островов было следующим:

Уровень воды (см)	5	15	25	35	45
Количество островов	2	5	2	5	0

В ответе напишите в каждой клетке квадрата 5 на 5, сколько кубиков на ней стоит. **[*4 балла*]**

(*Т. Голенищева-Кутузова, И. Ященко*)

Ответ. Один из возможных примеров приведён на рисунке ниже. На следующих рисунках показано, какие клетки закрыты водой при разных уровнях воды.

4	3	4	3	4
0	0	1	0	0
0	4	3	4	0
0	0	0	0	0
2	1	2	1	2

4	3	4	3	4
		1		
	4	3	4	
2	1	2	1	2

5 см

4	3	4	3	4
	4	3	4	
2		2		2

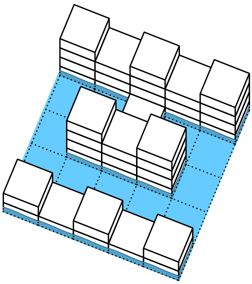
15 см

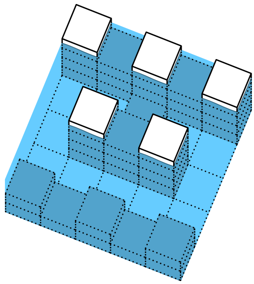
4	3	4	3	4
	4	3	4	

25 см

4		4		4
	4		4	

35 см

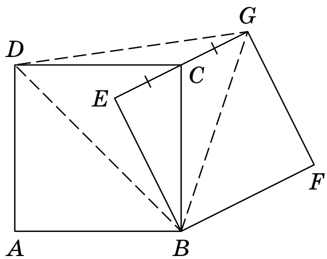




Комментарий. Изучая, как меняется рельеф местности при постепенно поднимающемся уровне воды, можно доказать замечательную теорему Эйлера. Об этом можно прочитать в статье М. Шубина «Топология и... рельеф местности» (журнал «Квант» № 8 за 1982 год, kvant.ras.ru).

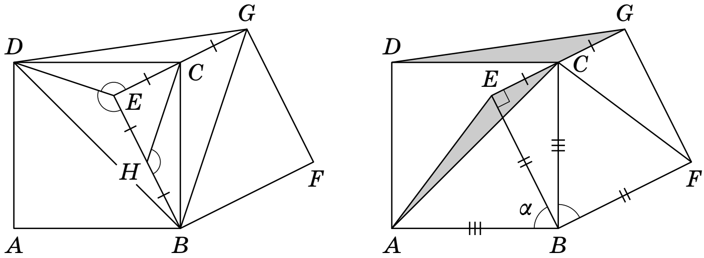
Задача 3. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

Задача 4. Два квадрата расположены как на рисунке, отмеченные отрезки равны. Докажите, что треугольник BDG равнобедренный. **[*6 баллов*]**



Решение 1. Рассмотрим треугольники DEG и DEB. У них общая сторона DE, равные стороны EG и EB (как две стороны квадрата). Осталось доказать, что углы DEG и DEB равны, — тогда указанные треугольники будут равны (по двум сторонам и углу между ними), а значит, будут равны и соответственные стороны DG и DB.

Равенство этих углов можно доказать так. Отметим H — середину отрезка EB. Заметим, что $HB = EC$ как половины стороны правого квадрата, а также $BC = DC$, $\angle HBC = 90^\circ - \angle ECB = \angle ECD$. Значит, треугольники HBC и ECD равны по двум сторонам и углу между ними. Так как треугольник EHC равнобедренный прямоугольный, $\angle EHC = 45^\circ$, а $\angle DEG = \angle CHB = 180^\circ - \angle EHC = 135^\circ$. Но тогда и $\angle DEB = 360^\circ - \angle DEG - \angle GEB = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ$.



Решение 2. Заметим, что $BD = AC$ как диагонали квадрата. Если мы докажем, что треугольники CEA и GCD (на рисунке справа отмечены серым) равны, то из равенства соответственных сторон AC и DG будет следовать $DG = AC = BD$. Как доказать равенство этих треугольников?

Рассмотрим треугольники ABE и CBF. У каждого из них две стороны равны сторонам исходных квадратов. Равны и углы между этими сторонами: каждый из них дополняет угол EBC до прямого угла квадрата. Значит, эти треугольники равны.

Но треугольник BCF равнобедренный (так как он «расположен в квадрате симметрично»; более формально: CB и CF — гипотенузы прямоугольных треугольников CBE и CFG, равных по двум катетам). Значит, $CF = CB = AB = AE$.

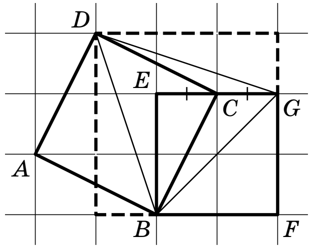
Теперь мы знаем, что в серых треугольниках равны стороны AE и DC, а стороны CE и CG равны по условию. Осталось доказать, что равны углы между сторонами.

Если угол при основании равнобедренных треугольников ABE и CBF равен α, то $\angle AEC = 90^\circ + \alpha$. Но и $\angle DCG = 360^\circ - \angle BCD - \angle BCG = 360^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$

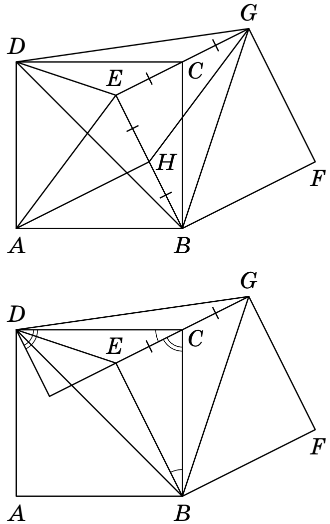
($\angle CBF = \alpha$ и $\angle BCG$ дают в сумме 180° как односторонние при параллельных сторонах квадрата и секущей BC).

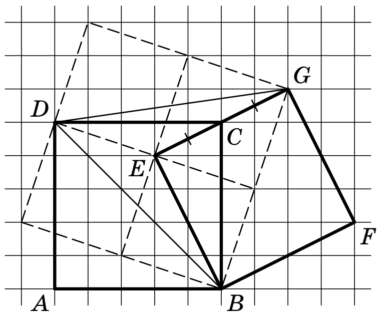
Равенство серых треугольников (а вместе с ним и утверждение задачи) доказано.

Решение 3. Перенесём чертёж на клетчатую бумагу. Начнём с квадрата $BEGF$: пусть это клетчатый квадрат 2×2. По отрезку BC построим квадрат $ABCD$. Теперь видно, что отрезки DG и DB равны как гипотенузы прямоугольных треугольников с катетами длиной 1 клетка и 3 клетки.



Комментарий. Есть множество дополнительных построений, которые также позволяют решить задачу. Вот некоторые из них:





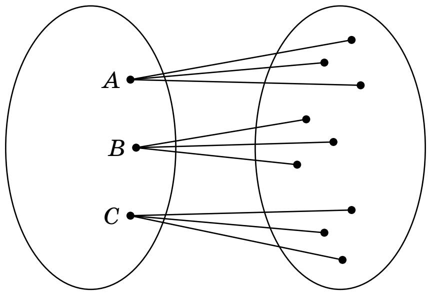
Задача 5. В параллели 7-х классов 100 учеников, некоторые из которых дружат друг с другом. 1 сентября они организовали несколько клубов, каждый из которых основали три ученика (у каждого клуба свои). Дальше каждый день в каждый клуб вступали те ученики, кто дружил хотя

бы с тремя членами клуба. К 19 февраля в клубе «Гепарды» состояли все ученики параллели. Могло ли получиться так, что в клубе «Черепахи» в этот же день состояло ровно 50 учеников? **[*8 баллов*]**

(*В. Клепцын, М. Раскин*)

Ответ. Да, могло.

Решение. Разделим семиклассников на две группы по 50 учеников. Пусть в каждой группе все ученики дружат со всеми, причём у троих учеников A, B и C из первой группы есть ещё по 3 разных друга во второй группе, и больше никто ни с кем не дружит.



Группа №1 Группа №2

Тогда в клубе «Гепарды», основанном любыми тремя учениками второй группы, после первого дня будет состоять вся вторая группа, после второго дня в него будут входить A, B и C из первой, а уже после третьего дня в клубе «Гепарды» будут состоять все ученики параллели.

Если же основателями клуба «Черепахи» будут A, B и C из первой группы, то на следующий день вся первая группа будет в клубе «Черепахи», но ни у кого из второй группы нет трёх друзей в первой, поэтому никто из второй группы в этот клуб не попадёт.

Задача 6. У царя есть 7 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 7 г, во втором 8 г, в третьем 9 г, в четвёртом 10 г, в пятом 11 г, в шестом 12 г, в седьмом 13 г, но не помнит, где какие.

Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее). Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний? [*8 баллов*] (*М. Евдокимов*)

Ответ. Да, может.

Решение. Заметим что если взять из каждого мешка по монете, то их суммарный вес будет равен $7+8+\ldots+13=70$ грамм. Назовём такой набор монет *комплектом*.

Пусть в указанном царём мешке монеты весят x грамм каждая. Если взять 70 таких монет, то их вес равен $70x$ — такой же, как у x комплектов. То есть если мудрец узнает, сколько комплектов нужно, чтобы уравновесить эти 70 монет, он ответит на вопрос царя.

Пускай первым взвешиванием мудрец сравнит вес этих 70 монет и 10 комплектов. Если весы в равновесии, то $x = 10$ и задача решена, если монеты перевесили, то $x > 10$, если перевесили комплекты, то $x < 10$.

Если мудрец знает, что $x > 10$, то за одно взвешивание он легко выяснит, весят монеты 11, 12 или 13 г каждая. Действительно, теперь можно сравнить вес 70 монет и 12 комплектов. Если монеты перевесили, то $x = 13$, если весы в равновесии, то $x = 12$, если комплекты перевесили, то $x = 11$.

Аналогичным образом мудрец может поступить в случае $x < 10$: монеты тогда могут весить по 7, 8 или 9 г, так что осталось сравнить вес 70 монет и 8 комплектов.

Отметим, что при каждом взвешивании мудрец использует не более чем $70 + 12$ монет из мешка, на который указал царь, и не более чем по 12 монет из остальных мешков. Так что монет в мешках ему хватит.

Комментарии. 1. Если снять с обеих чаш одинаковый набор монет, то результат взвешивания не изменится. Пользуясь этим соображением, мудрец сможет решить задачу и когда в каждом мешке хотя бы по $70 - 8 = 62$ монеты.

2. В решении используется лишь суммарный вес 7 монет. Поэтому аналогичным образом можно решить задачу не только для монет весом 7, 8, ..., 13 грамм, но и для любого другого набора из семи различных весов (при достаточном количестве монет в мешках).

Задача 1. Аня называет дату красивой, если все 6 цифр её записи различны. Например, 19.04.23 красивая дата, а 19.02.23 и 01.06.23 нет.

а) Сколько красивых дат будет в апреле 2023 года? **[*2 балла*]**

б) Сколько всего красивых дат в 2023 году? **[*2 балла*]**

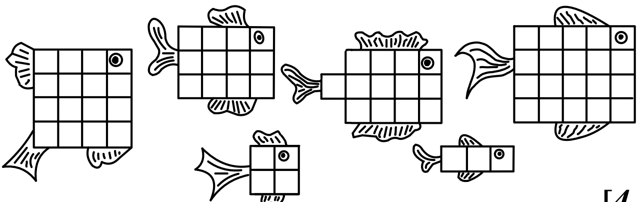
(*М. Евдокимов*)

Ответ. а) 5; б) 30.

Решение. а) Заметим, что в апреле дата записывается **.04.23. Поэтому в качестве первых двух цифр можно использовать только 1, 5, 6, 7, 8, 9. Первой из этих цифр может быть только 1, поэтому всего получается пять дат: 15, 16, 17, 18, 19 апреля.

б) См. решение задачи 1 для 7 класса (с. 9).

Задача 2. Кот за полминуты съел половинку самой маленькой рыбки, а всего он съел 5 рыбок и потратил на это целое число минут (кот ест рыбу с постоянной в «клеточках» скоростью). На рисунке изображены все рыбки, которые были у кота. Какую рыбку кот не стал есть?



[*4 балла*]

(*Т. Казицына*)

Ответ. Самую правую.

Решение. Раз за полминуты кот съел полрыбки, то за минуту он съест эту рыбку целиком. В маленькой рыбке 3 клетки, значит, за каждую минуту кот съедает по 3 клетки. За целое число минут будет съедено кратное трём число клеток. Суммарно во всех рыбках $3+4+16+12+13+$ $+20=68$ клеток. Это число при делении на 3 даёт остаток 2. Значит, после целого числа минут останется рыбка, количество клеток в которой при делении на 3 даёт остаток 2. Такая рыбка всего одна — это рыбка с туловищем 4×5 клеток. Она и не будет съедена.

Задача 3. Вася в течение 15 дней решал задачи — каждый день хотя бы одну. Каждый день (кроме первого), если погода была пасмурная, то он решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а если солнечная — на одну задачу меньше. За первые 9 дней Вася решил 13 задач.

а) Какая погода была на 10-й день? Сколько задач он решил в этот день? [*4 балла*]

б) Какое наибольшее число задач мог решить Вася в 15-й день? [*2 балла*] (*Б. Френкин*)

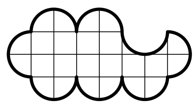
Ответ. а) 10-й день был пасмурным, Вася решил 2 задачи; б) 7 задач.

Решение. а) См. решение задачи 2 для 6 класса (с. 4).

б) Так как в 10-й день Вася решил 2 задачи (см. п. а), а в каждый следующий день можно решить максимум на 1 задачу больше, то через 5 дней можно решить максимум $2 + 5 = 7$ задач. Так получится, если с 11-го по 15-й день была пасмурная погода.

Задача 4. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4). [*7 баллов*]

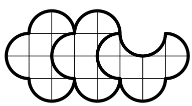
Задача 5. а) От маленького «печенья» откусили кусочек. Разрежьте остаток, изображенный на рисунке, на 3 равные части (т. е. одинаковые по размеру и по форме). Разрезы не обязательно прямолинейные.



[*2 балла*] (*Т. Корчемкина*)

б) См. задачу 4 для 6 класса (с. 5). [*5 баллов*]

Решение. а)



Задача 6. У царя есть 5 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 10 г, во втором 11 г, в третьем 12 г,

в четвёртом 13 г, в пятом 14 г, но не помнит, где какие. Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее).

а) Может ли мудрец за одно взвешивание проверить, верно ли, что в указанном мешке хранятся монеты по 10 г?

[*4 балла*]

б) Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний?

[*6 баллов*] (*М. Евдокимов*)

Ответ. а, б) Да, может.

Решение. а) Возьмём по одной монете из каждого из мешков, кроме указанного, поместим их на левую чашку, а на правую положим 5 монет из указанного мешка. Если в указанном мешке действительно лежат монеты по 10 г, то весы покажут равновесие:

$$11+12+13+14=10+10+10+10+10.$$

Если же в указанном мешке монеты тяжелее 10 г, то правая чашка окажется тяжелее 50 г. На левой же чашке суммарный вес четырёх монет будет меньше 50 г, равенства не будет (весы покажут, что правая чашка тяжелее).

б) Аналогично пункту а) за одно взвешивание можно проверить, не лежат ли в указанном мешке монеты по 12 г. Для этого достаточно взять по одной монете из всех мешков, кроме указанного, и сравнить полученный вес с весом четырёх монет из указанного мешка. Тогда возможны случаи:

$10+11+12+13 < 14+14+14+14$ (правая чашка перевесила);

$10+11+12+14 < 13+13+13+13$ (правая чашка перевесила);

$10+11+13+14 = 12+12+12+12$ (веса равны);

$10+12+13+14 > 11+11+11+11$ (левая чашка перевесила);

$11+12+13+14 > 10+10+10+10$ (левая чашка перевесила).

Если весы показали равенство, то мы уже поняли, какие монеты в указанном мешке.

Если левая чашка перевесила (т. е. в нашем мешке монеты по 10 г или по 11 г), то вторым взвешиванием можно проверить, лежат ли в указанном мешке монеты по 10 г (см. п. а).

Если же перевесила правая чашка, то в нашем мешке монеты либо по 13 г, либо по 14 г.

Тогда на левую чашку можно положить по 2 монеты из каждого мешка, кроме указанного, а на правую чашку 7 монет из указанного мешка. При этом $2\cdot(10+11+12+13)=92$ г легче, чем $14\cdot 7=98$ г, а $2\cdot(10+11+12+14)=94$ г тяжелее, чем $7\cdot 13=91$ г, поэтому если левая чашка окажется легче, то в нашем мешке монеты по 14 г, а если тяжелее — монеты по 13 г.

Комментарий. Возможен другой способ решения, аналогичный решению задачи 6 для 7 класса (с. 14).

7 класс в Математической вертикали

Задача 1. Дети посетили дельфинарий. Катя запомнила, что там было ровно 7 то ли выдр, то ли тюленей; Юра — что там было ровно 6 то ли морских котиков, то ли тюленей; Игорь — что там было ровно 5 то ли выдр, то ли морских котиков; Серёжа — что меньше всего там было то ли тюленей, то ли выдр. Никто из них не ошибся. Сколько выдр, тюленей и морских котиков было в дельфинарии?

[*4 балла*] (*Т. Казицына*)

Ответ. 5 выдр, 7 тюленей, 6 морских котиков.

Решение. Раз никто из детей не ошибся, то из выдр, морских котиков и тюленей кого-то было ровно 5, кого-то — ровно 6, а кого-то — ровно 7. Серёжа запомнил, что меньше всего (значит, 5) было тюленей или выдр, а Игорь — что 5 было выдр или морских котиков. Значит, 5 было именно выдр. Тогда 7 было не выдр, а тюленей. Следовательно, 6 — морских котиков.

Задача 2. Найдите какое-нибудь решение ребуса $Ф/Е + ВР/АЛЬ = 1$. Разным буквам соответствуют разные цифры. Черта обозначает деление. **[*5 баллов*]** (*Э. Акопян*)

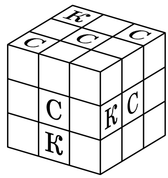
Ответ. Возможны разные варианты, например:

$$2/4 + 79/158 = 1, \quad 6/8 + 35/140 = 1, \quad 4/5 + 72/360 = 1$$

и другие.

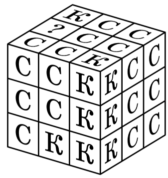
Задача 3. Ваня сложил куб $3 \times 3 \times 3$ из красных и синих брусков размером $1 \times 1 \times 3$. Затем он начал рисовать то, что у него получилось. Когда пришла Таня, Ваня успел раскрасить лишь 8 из 27 клеток на видимой поверхности нарисованного куба (см. рисунок). Посмотрев на рисунок, Таня сказала, что не знает цвет лишь одной из ещё не раскрашенных клеток. Ваня ответил, что эта клетка — красная. Завершите Ванин рисунок (отметьте буквой «С» синие клетки, буквой «К» красные, знаком «?» клетку, цвет которой Таня не могла восстановить). **[*6 баллов*]**

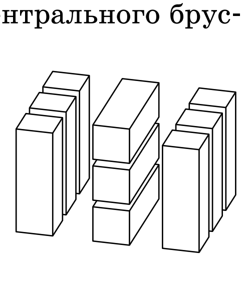
(*М. Евдокимов, Т. Казицына*)



Ответ. См. рисунок справа.

Решение. Сперва определим, как расположены бруски в кубе. Брусок, который проходит через синюю клетку на передней грани, снизу и справа ограничен красными кубиками $1 \times 1 \times 1$, поэтому проходит через центр куба $3 \times 3 \times 3$. Назовём этот брусок *центральным*. Красная и синяя клетки на правой грани принадлежат двум разным брускам, и оба эти бруска вертикальны (идти слева направо они не могут из-за центрального бруска). Значит, оставшиеся клетки на правой грани входят в ещё один вертикальный брусок. Теперь понятно, что куб состоит из трех слоев, в правом бруски вертикальные, в центральном горизонтальные, в левом снова вертикальные (см. рисунок справа). В каждом бруске,



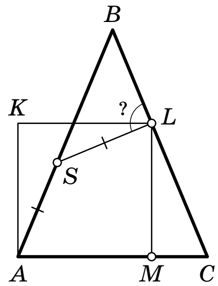


кроме среднего в левом слое, есть клетка известного цвета. Остается неизвестным цвет одного бруска, а значит, и его верхней клетки.

Задача 4. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4). **[*7 баллов*]**

Задача 5. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) и квадрат $AKLM$ расположены, как показано на рисунке. Точка S на AB такова, что $AS = SL$. Найдите величину угла SLB. **[*8 баллов*]**

(*Л. Попов*)



Ответ. 90°.

Решение. Рассмотрим треугольники AKS и LKS. Они равны по трём сторонам. Значит, равны углы KAS и KLS.

В равнобедренном треугольнике ABC равны углы BAC и ACB. Прямые KL и AC параллельны, значит, равны углы ACB и KLB как соответственные. Тогда $\angle SLB = \angle SLK + \angle KLB = \angle KAS + \angle ACB = \angle KAS + \angle BAC = \angle KAM = 90^\circ$.

Задача 6. У царя есть 7 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 7 г, во втором 8 г, в третьем 9 г, в четвёртом 10 г, в пятом 11 г, в шестом 12 г, в седьмом 13 г, но не помнит, где какие. Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее).

а) Может ли мудрец за одно взвешивание проверить, верно ли, что в указанном мешке хранятся монеты по 7 г? **[*4 балла*]**

б) Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний? **[*6 баллов*]** (*М. Евдокимов*)

Ответ. а, б) Да, может.

Решение. а) Возьмём по одной монете из каждого из мешков, кроме указанного, и поместим на левую чашку, а на правую поместим 8 монет из указанного мешка.

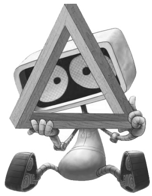
Тогда в случае, если в указанном мешке монеты минимального веса (7 г), правая чашка окажется легче: $8+9+$ $+10+11+12+13>8\cdot 7$. В противном случае легче окажется левая чашка: на ней будет лежать менее 63 г, а справа окажется не менее $8\cdot 8=64$ г.

б) См. задачу 6 для 7 класса (с. 14).

XX устная городская олимпиада по математике
для 6–7 классов
состоится 9 апреля 2023 года.

Подробную информацию см. на сайте
`olympiads.mccme.ru/ustn/`
с середины марта.

ЖУРНАЛ
КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ



Ежемесячный научно-познавательный
журнал для школьников 5-8 классов

В журнале вы найдёте интересные статьи и задачи по математике, лингвистике, физике, химии, биологии и другим естественным наукам, сможете принять участие в конкурсах по математике и русскому языку. Победителей конкурсов ждут дипломы и призы!

Знаете ли вы:

- **Как сделать логарифмическую линейку?**
- **Откуда берутся циклоны и антициклоны?**
- **Можно ли нарисовать четырёхмерный кубик?**
- **Как тёплые вещи спасают от жары?**
- **Откуда во льду воздушные иглы?**

Ответы на эти и многие другие вопросы ищите в журнале «Квантик»!

Кроме журнала, редакция выпускает альманахи, календари загадок, плакаты, а также серию книг «Библиотечка журнала «Квантик».

Вышли в свет три выпуска библиотечки:
• М. Евдокимов «Сто граней математики» • С. Федин «Перепутаница»
• К. Кохась «Как Бусенька что-то-там. Математические сказки».

Всю продукцию «Квантика» можно купить в магазине «Математическая книга» (адрес: г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, сайт: **biblio.mccme.ru**), а также в интернет-магазинах **kvantik.ru**, **ozon.ru**, **market.yandex.ru**, **wildberries.ru**, **my-shop.ru** и других.

Оформление подписки на журнал «Квантик»

по электронной версии Каталога Почты России:
• на сайте Почты России: podpiska.pochta.ru/press/ПМ068
• в почтовых отделениях: подписной индекс **ПМ068**

Кроме этого, на «Квантик» можно подписаться в Крыму, а также в Беларуси и др. странах — читайте об этом на **kvantik.com/podpiska**

ВСЕ ПОДРОБНОСТИ О ЖУРНАЛЕ — НА САЙТЕ KVANTIK.COM