6 класс

1. В кафе каждая пятая чашка кофе — бесплатно. Петя выпил 178 чашек. За сколько чашек он заплатил?

Ответ. 143.

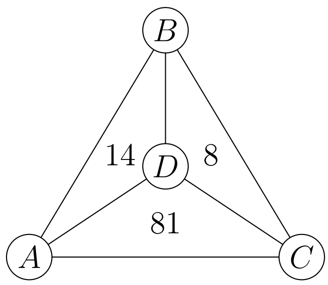
Решение. Номер каждой бесплатной чашки делится на 5, значит, последняя бесплатная чашка была 175й, а всего бесплатно Петя выпил $175 : 5 = 35$ чашек. Заплатил он за $178 - 35 = 143$ чашки.

2. Дед Мороз раздал четырём своим помощникам подарки для детей: Зайчик получил на один подарок больше, чем Гном, Снеговик на один больше, чем Зайчик, а Снегурочка на один больше, чем Снеговик. Всего Дед Мороз раздал 326 подарков. Сколько подарков досталось каждому из помощников?

Ответ. У Гнома 80 подарков, у Зайчика 81, у Снеговика 82, у Снегурочки 83.

Решение. У Зайчика на 1 подарок больше, чем у Гнома, тогда у Снеговика на 2 подарка больше, чем у Гнома, а у Снегурочки – на 3 подарка больше. Отложим в сторону эти $1 + 2 + 3 = 6$ «лишних» подарков и разделим оставшиеся $326 - 6 = 320$ подарков поровну на 4 помощников: теперь у каждого будет, как у Гнома, $320 : 4 = 80$ подарков. Добавив обратно отложенные «лишние» подарки, получим ответ.

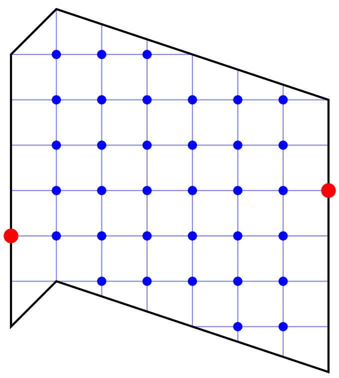
3. Гриша написал в кружках цифры (не обязательно различные), а внутри каждого треугольника записал либо сумму, либо произведение цифр в его вершинах. Хулиган Вася заменил все цифры в кружочках на буквы. Какую цифру заменяет каждая буква?



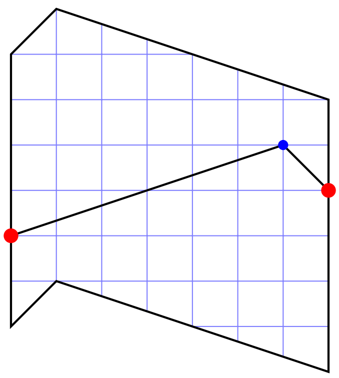
Ответ. $A = 9$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 3$.

Решение. Посмотрим на нижний треугольник. Число 81 слишком большое — его нельзя получить как сумму трёх цифр — значит, оно получено как произведение. Разложим на множители: $81 = 9 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Как произведение трёх цифр мы можем представить 81 только двумя способами: $9 \cdot 9 \cdot 1$ или $9 \cdot 3 \cdot 3$. Поэтому цифры A, C, D — это 9, 9, 1 или 9, 3, 3 в некотором порядке. В треугольнике справа написано 8. Так как $9 > 8$, то ни C, ни D не могут равняться 9, поэтому $C = D = 3$, а $A = 9$. Значит $B = 8 - 3 - 3 = 2$. Для левого треугольника всё сходится: $14 = 9 + 3 + 2$.

4. На границе фигуры отмечены красным два узла. Выберите ещё один узел так, что если его соединить отрезками с двумя красными, то фигура разделится на две равные по форме и размеру части.



Ответ. Подходит только один узел (см. рисунок).



5. В ребусе ДЕК + А = БРЬ разные буквы заменяют разные цифры.

а) Найдите какое-нибудь решение этого ребуса. В ответ введите число ДЕКАБРЬ, составленное из цифр этого решения.

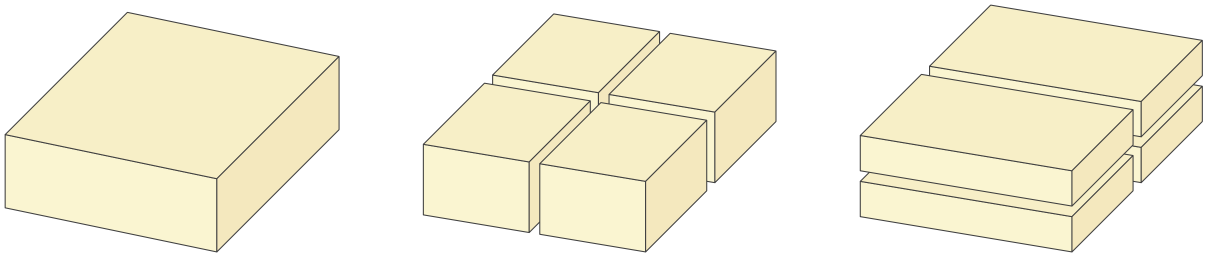
б) Найдите решение, для которого число ДЕКАБРЬ будет наибольшим.

Ответ. Наибольший ДЕКАБРЬ — это 7965801; ребус зашифровывает пример $796+5 = 801$. Есть множество других решений ребуса.

Решение. Найдём сразу наибольший ДЕКАБРЬ. Поскольку от добавления однозначного А к трёхзначному ДЕК все цифры изменились, то при сложении должен был быть переход из разряда единиц в разряд десятков, а затем из разряда десятков в разряд сотен. Такое может быть, только если Е $= 9$. Тогда Р $= 0$ и Д $+ 1 =$ Б $\neq 9$. Значит, Д не может равняться ни 9, ни 8. Если Д $= 7$, то Б $= 8$, и К не может быть больше 6, и значит А не может быть больше 5. Проверим: $796 + 5 = 801$ — подходит, Ь $= 1$.

6. Таня испекла бисквитный корж с квадратным основанием, причём высота коржа в три раза меньше стороны основания (на рисунке слева). Затем Таня сделала из коржа

4 одинаковых пирожных, разрезав как показано на рисунке в середине. Потом покрыла каждое пирожное со всех сторон (в том числе снизу) шоколадом. После этого у Тани осталось 80 г шоколада. Если бы она сделала пирожные другой формы, разрезав как показано на рисунке справа, и тоже покрыла их со всех сторон шоколадом, то у неё осталось бы только 56 г шоколада. Сколько граммов шоколада было у Тани изначально?

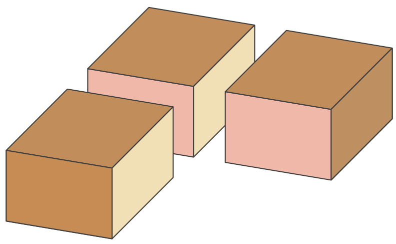


Ответ. 164

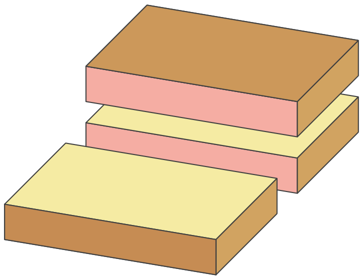
Решение. В любом случае Таня покроет шоколадом все 6 граней изначального коржа, а также грани, появившиеся в результате разрезания. В первом случае после каждого из двух разрезов появляются грани общей площадью как две боковых грани, а значит, после двух разрезов появится площадь, равная четырём боковым граням. Во втором случае один разрез также даёт новые грани, которые в сумме как две боковых, а вот второй разрез даёт грани, равные по площади двум верхним граням. Значит, разница между площадями всех граней в первом и втором случае есть разница между двумя боковыми и двумя верхними гранями исходного коржа. Значит, на верхнюю грань уходит на $(80 - 56) : 2 = 12$ грамм шоколада больше, чем на боковую. По условию, сторона основания в три раза больше высоты коржа, следовательно, верхняя грань в три раза больше боковой, а значит, эти же 12 грамм покроют две боковых грани. Таким образом, на одну боковую грань уходит 6 г шоколада, на верхнюю грань — 18 г. Таня покрыла шоколадом площадь, равную площади 2 верхних граней, 4 боковых и ещё 4 боковых от разрезов, то есть потратила всего $2 \cdot 18 + 8 \cdot 6 = 84$ грамма шоколада, и 80 грамм у неё осталось. Значит, изначально было 164 г шоколада.

Решение 2. Представим, что Таня сначала покрыла со всех сторон шоколадом целый корж, и только потом разрезала его на части.

В первом случае у каждого кусочка остались не покрытыми по 2 одинаковые грани. Но две такие грани дают такую же площадь, как одна боковая грань целого коржа (см. рисунок: две красные грани вместе образуют боковую сторону коржа, и две жёлтые грани образуют боковую сторону коржа)! То есть в первом случае Тане нужно покрыть шоколадом целый корж и ещё 4 его боковые стороны — иными словами, два основания коржа (верхнее и такое же нижнее) и 8 боковых сторон.



Во втором случае после того, как Таня покрыла шоколадом целый корж и разрезала его на части, у каждого кусочка снова не покрыты 2 грани, но уже разные: две большие грани (на рисунке жёлтые) образуют такую же грань, как основание целого коржа, а две маленькие (на рисунке красные) — такую же, как боковая грань целого коржа. Значит, в этом случае Тане надо покрыть целый корж и ещё 2 его основания и 2 боковые грани — то есть 4 основания целого коржа и 6 боковых граней.



Таким образом, разница в $80 - 56 = 24$ г шоколада — это разница между 4 основаниями с 6 боковыми гранями и 2 основаниями с 8 боковыми гранями, то есть между 2 основаниями и 2 боковыми гранями. Значит, на одно основание уйдёт на $24 : 2 = 12$ г шоколада больше, чем на одну боковую грань. Но по условию высота коржа в три раза меньше стороны квадратного основания, значит, площадь боковой грани в три раза меньше площади основания. Тогда основание больше боковой грани на ещё две боковые грани, и на одну боковую грань уйдёт 6 г шоколада.

Осталось посчитать, сколько шоколада было у Тани. Как мы уже посчитали, в первом случае нам нужно покрыть шоколадом 2 основания и 8 боковых граней — всё равно что $2 \cdot 3 + 8 = 14$ боковых граней. На одну такую грань уходит 6 г шоколада, значит, на 14 ушло бы $6 \cdot 14 = 84$ г. Ещё 80 г шоколада у Тани осталось — значит, изначально у неё было 164 г шоколада.

7. Трое пиратов обсуждали количество имеющихся у них алмазов.
А: «У Б – 2 алмаза».
Б: «У В – 2 алмаза».
В: «У А – 2 алмаза».
А: «У нас всех в сумме 2 алмаза».
Б: «У нас всех в сумме 3 алмаза».
В: «У нас всех в сумме 4 алмаза».

Оказалось, что каждый соврал столько раз, сколько у него алмазов. Сколько алмазов у каждого из пиратов?

Ответ. У А 1 алмаз, у Б 2 алмаза, у В 1 алмаз.

Решение. Каждый сделал два высказывания, значит, алмазов у каждого не больше двух. Посмотрим, у скольких человек может быть ровно 2 алмаза. Если хотя бы у двоих, то с одной стороны, среди первых трёх утверждений хотя бы два верны, а с другой — оба этих человека должны были соврать оба раза, то есть среди первых трёх утверждений есть два неверных — противоречие. Значит, не более чем у одного пирата есть 2 алмаза.

Посмотрим, сколько всего может быть неверных утверждений. Среди первых трёх утверждений хотя бы два неверны. Очевидно, что и среди последних трёх хотя бы два неверны. Итого в сумме хотя бы 4 неверных, то есть у всех пиратов в сумме есть хотя бы 4 алмаза. При условии, что 2 алмаза может быть только у одного пирата, 4 алмаза можно набрать только единственным способом: у одного из пиратов есть 2 алмаза, а у двух других — по 1.

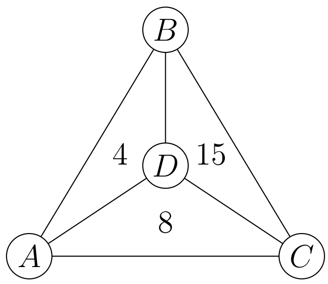
Тогда В на второй вопрос ответил правду, значит, у него только 1 алмаз. Тогда Б солгал в ответ на оба вопроса — у него 2 алмаза. Последний алмаз у А (он сказал первый раз правду и второй раз солгал).

7 класс

1. Дед Мороз раздал четырём своим помощникам подарки для детей: Зайчик получил на один подарок больше, чем Гном, Снеговик на один больше, чем Зайчик, а Снегурочка на один больше, чем Снеговик. Всего Дед Мороз раздал 326 подарков. Сколько подарков досталось каждому из помощников?

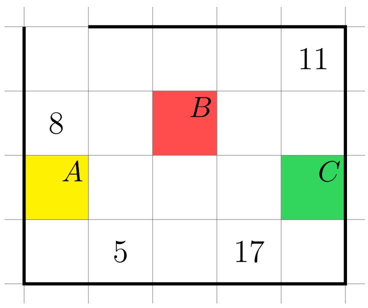
Ответ. У Гнома 80 подарков, у Зайчика 81, у Снеговика 82, у Снегурочки 83.
Решение. См. задачу **2** за 6 класс.

2. Гриша написал в кружках различные цифры, а внутри каждого треугольника записал либо сумму, либо произведение цифр в его вершинах. Хулиган Вася заменил все цифры в кружочках на буквы. Напишите, какую цифру заменяет каждая буква.



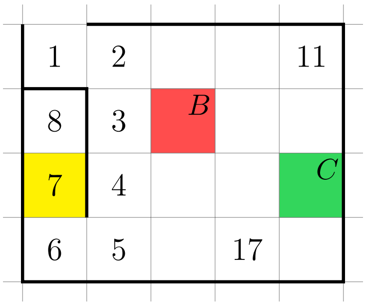
Ответ. $A = 0$, $B = 1$, $C = 5$, $D = 3$.
Решение. Число 4 нельзя получить как произведение трёх различных натуральных чисел, а в виде суммы можно получить только как $4 = 3+1+0$. Ноль не может участвовать в произведении, а 15 нельзя получить ни как сумму 0, 3 и некоторой цифры, ни тем более как сумму 0, 1 и некоторой цифры. Значит, $A = 0$, а $15 = 1 \cdot 3 \cdot 5$ и $C = 5$, откуда $D = 3$, а $B = 1$.

3. На клетчатой бумаге был нарисован лабиринт: прямоугольник 5×4 (внешняя стена) с выходом шириной в одну клетку, а также внутренние стенки, идущие по линиям сетки. На рисунке мы скрыли от вас все внутренние стенки. Придумайте, как они могли располагаться, зная, что числа, стоящие в клетках, показывают наименьшее количество шагов, за которое можно было выйти из лабиринта, стартовав из этой клетки (шаг делается в соседнюю по стороне клетку, если они не разделены стенкой). В ответ запишите, сколько шагов до выхода будет в вашем лабиринте из жёлтой (A), красной (B) и зелёной (C) клеток.

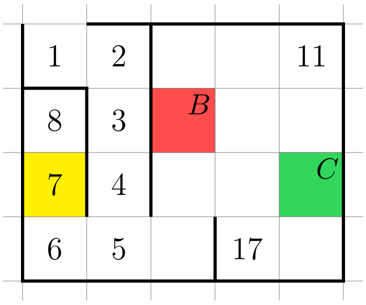


Ответ. Жёлтая клетка (A): 7, красная клетка (B): 8, зелёная клетка (C): 15.

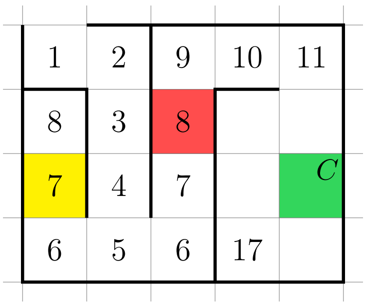
Решение. Чтобы выйти из лабиринта, начав в клетке с цифрой 5, нам нужно сделать как минимум 1 шаг влево и 4 шага вверх (в каком-то порядке) — это уже 5 шагов, значит, дополнительных шагов не будет. Кроме того, путь от клетки с цифрой 5 до выхода не может проходить через клетку с цифрой 8 (иначе от неё до выхода было меньше шагов). Значит, путь от клетки с цифрой 5 к выходу — это 3 шага вверх, один влево и один наружу, и этот путь отделён стенками от клетки с цифрой 8. Справа от жёлтой клетки тоже стоит стенка: иначе мы бы вышли, начиная из клетки с цифрой 8, за 6 шагов.



Далее, в трёх правых столбцах лабиринта 12 клеток, а от всех клеток второго столбца можно дойти до выхода не более чем за 5 шагов — значит, путь к выходу от клетки с числом 17 проходит через все клетки правых трёх столбцов и выходит к клетке с цифрой 5. Значит, мы можем восстановить ещё несколько стенок:



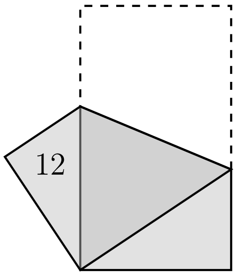
Посмотрим теперь на клетку с числом 11. Чтобы попасть из неё в клетку с цифрой 5 (иначе во второй столбец уже не попасть), нам нужно как минимум 6 шагов: 3 шага вниз и 3 шага влево (в каком-то порядке). Если путь от 11 до 5 не проходит через верхнюю клетку третьего столбца, то и по пути от 17 до 5 в эту клетку нам заходить не нужно: мы не можем дойти до этой клетки, не выйдя на путь от 11 до 5 — а с этого пути заходить в лишнюю клетку уже бессмысленно. Но тогда путь до выхода от клетки с числом 17 займёт меньше 17 шагов — противоречие. Значит, путь от 11 до 5 идёт по верхней строке и третьему столбцу и отделён стенками от остальных клеток четвёртого столбца.



Осталось понять, как дойти от 17 до 11. Нам нужно потратить на это 6 шагов, значит, маршрут пройдёт по всем пяти ещё не заполненным клеткам. У правой нижней клетки лабиринта ровно два соседа, значит, в неё мы попадём из клетки с числом 17, а из неё пойдём наверх. Шагнуть ещё на клетку вверх мы не можем: тогда от 17 до 11 можно добраться всего за 4 шага. Значит, нужно шагнуть на клетку влево — а дальше остаётся только пойти вверх, шагнуть вправо и шагнуть вверх на клетку 11.

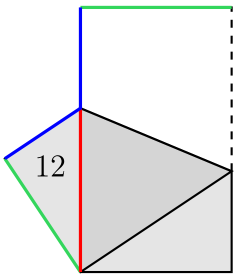
1	2	9	10	11
8	3	8	13	12
7	4	7	14	15
6	5	6	17	16

4. Прямоугольный лист бумаги сложили так, чтобы две противоположные вершины совпали. Периметр левого треугольника (см. рисунок) получился равен 12. Найдите периметр исходного прямоугольника. Если нужно, округлите ответ до одного знака после запятой.



Ответ. 24

Решение. Разогнув лист обратно, увидим, что синие отрезки равны и зелёные отрезки равны. Периметр левого треугольника складывается из длин красного, синего и зелёного отрезков — но из таких же длин складываются длинная и короткая стороны прямоугольного листа! Значит, длины короткой и длинной сторон в сумме дают 12, а периметр прямоугольника в 2 раза больше, то есть 24.



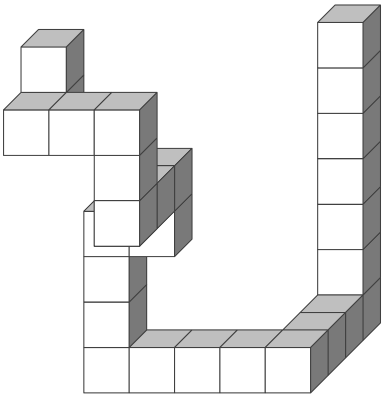
5. На планете Тау Кита живут инопланетяне, у каждого из которых один, два или три глаза. Если у инопланетянина чётное число глаз, он всегда говорит правду, а если

нечётное — всегда врёт. Как-то раз зелёный инопланетянин сказал жёлтому:
— У нас с тобой одинаковое число глаз!
— Вообще-то у меня два глаза, — возразил жёлтый. — А вот у тебя всего лишь один.
— У жёлтого и правда два глаза, — вмешался оранжевый. — Зато у меня целых три глаза!
Так сколько же глаз было у каждого инопланетянина?

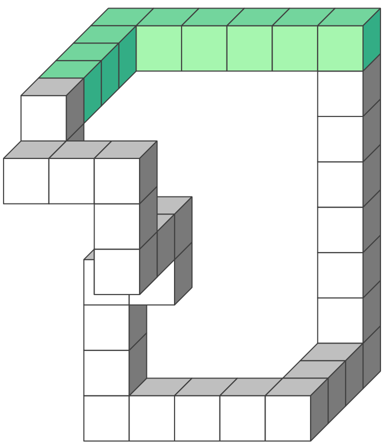
Ответ. У зелёного 3 глаза, у жёлтого 1 глаз, у оранжевого 1 глаз.

Решение. Честный инопланетянин не может сказать, что у него три глаза (или один глаз). Значит, оранжевый инопланетянин точно врёт. Поэтому у оранжевого ровно один глаз, а у жёлтого не два глаза, то есть и жёлтый инопланетянин врёт. Но и зелёный не мог сказать правду (ведь если у него столько же глаз, сколько у жёлтого, то он должен врать). Значит, у зелёного и жёлтого разное количество глаз. Жёлтый сказал, что у зелёного один глаз, значит у зелёного на самом деле три глаза, а у жёлтого — один.

6. Петя хочет собрать из кубиков замкнутую «змейку», приклеивая кубики друг к другу по грани. Склеив змейку, как на рисунке, Петя обнаружил, что кубиков ему не хватает. Какое наименьшее количество кубиков нужно добавить, чтобы Петя смог достроить замкнутую змейку?



Ответ. Понадобится 9 кубиков; пример показан на рисунке:



Решение. Как это понять, не собирая змейку самому? Посмотрим, как мы сдвинулись от правого дальнего конца змейки по каждому из направлений. Если первый кубик правого дальнего конца находится на нулевом уровне по вертикали, то мы сначала сдвинулись на 6 уровней вниз, потом два раза оставались на том же уровне, после чего поднялись на 3 уровня, остались там же, поднялись на 1 уровень, остались там же, поднялись ещё на 2 уровня, снова два раза остались так же, и наконец поднялись ещё на 1 уровень. То есть всего по вертикали мы опустились на 6 уровней и поднялись на 7 — значит, последний кубик на 1 уровень выше первого. Аналогично, по горизонтали (справа налево) последний кубик относительно первого сдвинулся на $0+0+4+0-1+0+0+0+2+0+0=5$ уровней, и по глубине (сзади вперёд) — на $0+3+0+0+0+0+2+0+0-1+0=4$ уровня. Чтобы попасть от последнего кубика обратно в первый, нам придётся вернуться на 1 уровень по вертикали, 5 уровней по горизонтали и 4 уровня по глубине — всего 10, но чтобы замкнуть змейку, нам нужно попасть в соседний с первым кубик, значит, нужно преодолеть на 1 уровень меньше, то есть нужно добавить 9 кубиков.

7. В начале каждого месяца кружок «Юный следопыт» принимает новых участников. Сначала им присваивают статус «новичок», в этом статусе они участвуют в кружке три месяца. В начале четвёртого месяца им присваивают статус «любитель», а в конце пятого они становятся опытными следопытами. В сентябре в кружке было 15 новичков и 19 любителей, а в ноябре — 21 новичок и 12 любителей. Сколько любителей будет в кружке к Математическому празднику, который проходит 16 февраля?

Ответ. 18

Решение. Для тех, кто будет любителем 16 февраля, февраль — либо четвёртый, либо пятый месяц, то есть они должны были прийти на кружок либо в октябре, либо в ноябре. Сентябрьские любители к ноябрю уже станут опытными, а вот сентябрьские новички в ноябре либо будут новичками третий месяц, либо будут любителями. Всего в ноябре было $21+12=33$ неопытных следопыта, из них 15 были в сентябре новичками — значит, $33-15=18$ пришли на кружок в октябре или ноябре и в середине февраля будут любителями.

Задания и решения подготовили: Т. Голенищева-Кутузова, Т. Казицына, М. Колодей, Т. Корчемкина, Г. Мерзон, И. Русских, А. Хачатурян, И. Ященко.