Информация о наборе в некоторые московские школы и классы с углублённым изучением математики на 2001/2002 учебный год. Информация предоставлена школами в МЦНМО (тел. 241–0500; `http://www.mccme.ru`)

Школа	Телефон	Адрес	Классы	Сроки (2001 год)
2	137–1769 137–6931	ул. Фотиевой, 18 (за универмагом «Москва»; м. «Октябрьская», далее до ост. «Универмаг „Москва“»).	7, 8	апрель–май
7	131–8110	ул. Крупской, 17 (м. «Университет», 2 ост. на тролл. 28, 34)	8, 10	апрель–май
18 СУНЦ МГУ	445–1108	Кременчугская ул., 11 (м. «Кутузовская», далее авт. 91, 157 до ост. «Универмаг „Минск“», или м. «Университет», далее авт. 103)	10, 11	29.04.2001 13.05.2001
54	245–9972 245–5425	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	9	апрель–май
57	291–8572 291–5458	Малый Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая», «Кропоткинская»)	8, 9	собеседования в апреле
91	290–3558	ул. Поварская, 14 (м. «Арбатская»)	9	запись в марте
109	434–5106 434–5107	ул Бакулева, 20 (м. «Юго-Западная», далее авт. 144, 227, 281, 642, 720 до ост. «Теплостанский проезд»)	9	запись на экзамены с 1 марта
218	976–0320 976–4087	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская», «Тимирязевская»)	8, 9	запись на собеседования с 15 марта
1134	932–0000 932–0801	ул. Раменки, 15, к. 1 (м. «Проспект Вернадского», авт. 715 до ост. »Универсам«)	9	07.04.2001
1543	433–1644 434–2644	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, к. 5 (м. «Юго-Западная», 5–7 минут пешком до магазина «Польская мода»)	8	апрель

Московский комитет образования
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт повышения квалификации работников образования
Международная соросовская образовательная программа в области точных наук
Дом научно-технического творчества молодёжи
Московский центр непрерывного математического образования

LXIV Московская

математическая олимпиада

Математический праздник

www.demos.su

www.yandex.ru

Москва
18 февраля 2001 года

6 класс

Задача №1. Решите ребус: $\boldsymbol{AX \cdot УX = 2001}$. [*4 балла*] (А. Блинков)

Решение: $\mathbf{2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29}$. Поэтому число $\mathbf{2001}$ можно представить в виде произведения двузначных чисел лишь следующими способами: $\mathbf{69 \cdot 29}$ или $\mathbf{23 \cdot 87}$.

Ответ: $\boldsymbol{AX = 29}$, $\boldsymbol{УX = 69}$ или наоборот, $\boldsymbol{AX = 69}$, $\boldsymbol{УX = 29}$.

Задача №2. Офеня[1] купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за **5** рублей, либо три ручки за **10** рублей. От каждого покупателя Офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки? [*4 балла*] (А. Саблин)

Решение: Если оптовая цена ручки $\boldsymbol{x}$ рублей, то $\boldsymbol{5 - x = 10 - 3x}$, откуда $\boldsymbol{x = 2{,}5}$. Значит, оптовая цена — **2** рубля **50** копеек.

Ответ: Оптовая цена ручки — **2** рубля **50** копеек.

Задача №3. Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Наташе коробки хватило только на **41** чашку чая, а Инне — только на **58**. Сколько пакетиков было в коробке? [*6 баллов*] (А. Спивак, И. Ященко)

Решение: Поскольку Наташе чаю хватило только на **41** чашку, то в пачке не более $\mathbf{41/2 = 20{,}5}$ пакетиков. Поскольку Инне хватило чаю только на **58** чашек, то в коробка не менее $\mathbf{58/3 = 19\frac{1}{3}}$ пакетиков. Значит, в коробках было по **20** пакетиков чая.

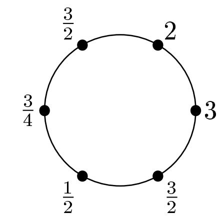
Ответ: В коробке было **20** пакетиков чая.

Задача №4. Расставьте по кругу **6** различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних. [*6 баллов*] (А. Митягин)

[1] Продавец в разнос, коробейник.

Решение: Если рядом стоят числа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то следующим стоит число $\boldsymbol{b/a}$, за ним $\boldsymbol{1/a}$, потом $\boldsymbol{1/b}$, наконец, $\boldsymbol{a/b}$. Такие шесть чисел удовлетворяют условию задачи. Конечно, при неудачном выборе чисел $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ какие-то из указанных выше шести чисел совпадут, но нас это не остановит: для решения задачи достаточно предъявить один пример. Например, взять $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{b = 3}$.

Ответ:



Задача №5. Вифсла, Тофсла и Хéмуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал **6** снежков, Хемуль — **5**, а Тофсла — **4**. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели **13** снежков. (В себя самого снежками не кидаются.) [*8 баллов*] (Т. Голенищева-Кутузова, В. Клепцын)

Решение: Если в Вифслу, Тофслу и Хемуля попали $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ снежков соответственно, то всего было брошено $\boldsymbol{13+x+y+z}$ снежков (поскольку **13** снежков не достигли цели). С другой стороны, Вифсла бросил $\boldsymbol{6x}$, Хемуль — $\boldsymbol{5y}$, а Тофсла — $\boldsymbol{(4z+1)}$ снежков (вместе с первым снежком). Получаем уравнение:

$$\boldsymbol{6x + 5y + 4z + 1 = 13 + x + y + z,}$$

откуда $\boldsymbol{5x + 4y + 3z = 12.}$ Так как $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ — целые положительные числа, то $\boldsymbol{x}$ может быть равен **1** или **2**, $\boldsymbol{y}$ — **1**, **2** или **3**, $\boldsymbol{z}$ — **1**, **2**, **3** или **4**. Перебором находим единственное решение $\mathbf{(1;1;1)}$.

Ответ: В Хемуля, Вифслу и Тофслу попали по одному разу.

Задача №6. Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно закрасить а) [***6 баллов***] **26**; б) [***4 балла***] **28** клеток, соблюдая это условие. (В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от **1** до **26** или до **28** в том порядке, в котором проводилось закрашивание.) (И. Акулич)

Ответ приведён на рисунке.

1			20			13	
	2		21		12		
		3	22	11			
14	15	16	4	17	18	19	27
		10	23	5			
	9		24		6		
8			25			7	
			26				28

7 класс

Задача №1. В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $\mathbf{23021^{377} - 1}$. Не опечатка ли это? [***4 балла***] (С. Маркелов)

Ответ: Конечно, это опечатка.

Решение: Любая степень числа, оканчивающегося цифрой **1**, тоже оканчивается цифрой **1**. Поэтому разность $\mathbf{23021^{377} - 1}$ оканчивается на **0** и, следовательно, не является простым числом.

На самом деле наибольшим известным сегодня простым числом является число $\mathbf{2^{3021377} - 1}$. Простые числа вида $\mathbf{2^n - 1}$ называют числами Мерсенна (по имени математика 17 века М. Мерсенна, который их исследовал). Можно доказать, что при составном n число $\mathbf{2^n - 1}$ составное. Поэтому числа Мерсенна соответствуют простым n. Например, $\mathbf{2^2 - 1 = 3}$, $\mathbf{2^5 - 1 = 31}$, $\mathbf{2^7 - 1 = 127 \ldots}$ — простые числа. Однако нельзя утверждать, что каждому простому числу p соответствует простое число $\mathbf{2^p - 1}$. Например, $\mathbf{2^{11} - 1}$ — составное. Поиском чисел Мерсенна занимались многие выдающиеся математики, например Эйлер доказал, что число $\mathbf{2^{31} - 1}$ — простое. Конечно или бесконечно их множество — вопрос, на который пока нет ответа.

Задача №2. Приходя в тир, игрок вносит в кассу **100** руб. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на **10%**, а после каждого промаха — уменьшается на **10%**. Могло ли после нескольких выстрелов выстрелов у него оказаться **80** рублей **19** копеек? [***5 баллов***] (И. Ященко)

Ответ: Да, могло, если он попал только один раз, а три раза промахнулся.

Решение: Решение проще всего найти, если разложить **8019** на множители $\mathbf{8019 = 9^3 \cdot 11}$.

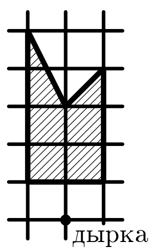
Задача №3. Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал **2** подъезда и добавил **3** этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать еще **2** подъезда и добавить еще **3** этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей, и на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.) [***7 баллов***] (В. Гуровиц, И. Ященко)

Ответ: Да, могло. Например, если в исходном проекте было **5** подъездов, **4** этажа и на каждом этаже по одной квартире: $\mathbf{5 \cdot 4 = 20}$, $\mathbf{3 \cdot 7 = 21}$, $\mathbf{1 \cdot 10 = 10}$.

Задача №4. В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следующей формы (см. рисунок).

Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь, так, чтобы флажок закрывал дырку. [***10 баллов***]. (А. Шень)

Ответ:

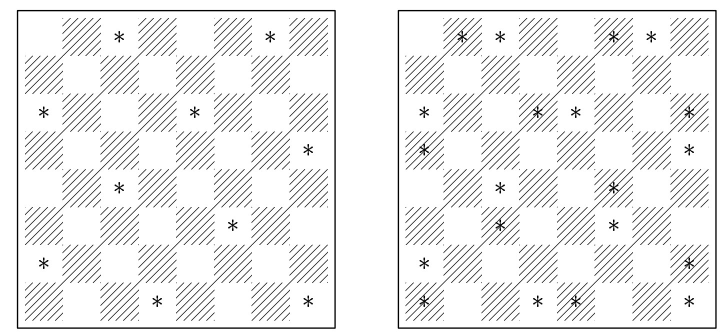


Задача №5. Отметьте на доске $\mathbf{8 \times 8}$ несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой. [***10 баллов***]

Решение: Будем рассуждать, используя шахматную доску.

Заметим, что белые клетки граничат по стороне только с черными и наоборот. Поэтому сначала отметим несколько белых клеток так, чтобы у каждой черной клетки был ровно один отмеченный сосед (на рисунке слева). Затем отметим несколько черных клеток, чтобы и у каждой белой клетки появился отмеченный сосед (на рисунке справа), при этом у черных клеток новых отмеченных соседей не появится.

Ответ:



Составление и обсуждение варианта: И. В. Ященко, А. В. Спивак, В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, Н. С. Глаголева, Т. И. Голенищева-Кутузова, В. М. Гуровиц, В. А. Клепцын, Р. М. Кузнец, А. К. Кулыгин, А. Ю. Митягин, А. В. Хачатурян, А. Шень.

Узнать свои результаты можно начиная с 21 февраля по телефону 241–1237 (с 12 до 18 часов) или в Интернете `http://www.mccme.ru`

Выдача неполученных призов и грамот по средам с 16 до 18 часов в МЦНМО (Б. Власьевский пер., 11. Проезд: м. Смоленская, выйти к Арбату, идти по Денежному пер., повернуть налево на Сивцев Вражек, второй поворот направо — Б. Власьевский.)