Московский комитет образования
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Дом научно-технического творчества молодёжи
Московский центр непрерывного математического образования

LXV Московская
математическая олимпиада

Математический праздник

В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц,
Т. В. Караваева, В. А. Клепцын, Р. М. Кузнец, А. В. Спивак,
Р. М. Фёдоров, А. Шень, А. Хачатурян, А. Чеботарёв, И. В. Ященко

Москва
17 февраля 2002 года

6 класс

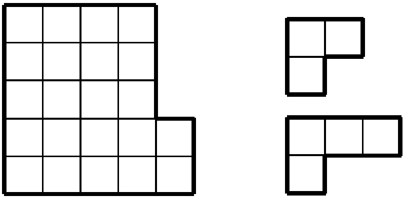
Задача №1. Решите ребус: **БАО · БА · Б** $= 2002$. [*3 балла*] (А. Блинков, А. Хачатурян)

Решение. Если Б $\geqslant 2$, то БА $\geqslant 20$ и БАО $\geqslant 200$, так что БАО · БА · Б $\geqslant 200 \cdot 20 \cdot 2 = 8000 > 2002$. Значит, Б $= 1$.

Разложим число 2002 на простые множители: $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Теперь легко выписать все двузначные делители числа 2002, начинающиеся на цифру 1. Это числа 11, 13 и $2 \cdot 7 = 14$. Вычислим соответствующие частные: $2002 : 11 = 182$, $2002 : 13 = 154$ и $2002 : 14 = 143$.

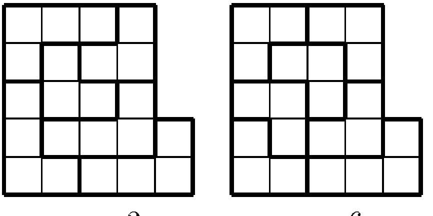
Ответ: $143 \cdot 14 \cdot 1 = 2002$.

Задача №2. Незнайка разрезал фигуру на трёхклеточные и четырёхклеточные уголки, нарисованные справа от неё. Сколько трёхклеточных уголков могло получиться? [*4 балла*] (А. Митягин)



Решение. Фигура состоит из 22 клеток. Если при разрезании получилось x трёхклеточных уголков и y четырёхклеточных, то $3x + 4y = 22$. Очевидно, что число x чётно и $x \leqslant 8$ $(3 \times 8 = 24)$, так что x может быть равно 0, 2, 4 или 6. Ни 0, ни 4 не подходят: y должно быть целым. При $x = 2$ получаем $y = 4$, а при $x = 6$ получаем $y = 1$.

Оба случая возможны, как показано на рисунках:



$x = 2$ $x = 6$

Ответ: 2 или 6.

Задача №3. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске? [*6 баллов*] (В. Произволов)

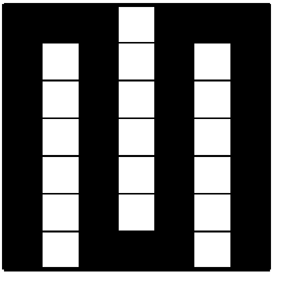
Решение. Обозначим наименьшее из десяти чисел буквой x. Тогда

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5)+ \\ +(x + 6) + (x + 7) + (x + 8) + (x + 9) - (x + y) = 2002,$$

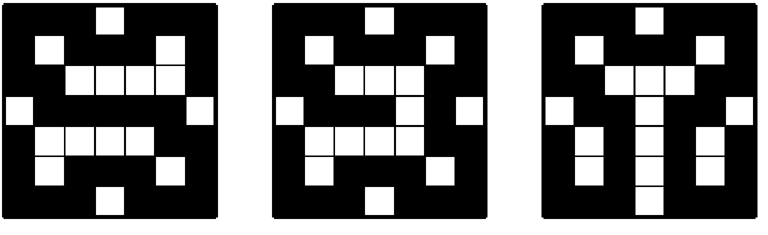
где $x + y$ — вычеркнутое число (так что $0 \leqslant y \leqslant 9$). Приведём подобные: $10x + 45 - x - y = 2002$, то есть $9x = 1957 + y$. Сумма $1957 + y$ должна делиться на 9, а учитывая условие $0 \leqslant y \leqslant 9$, получаем, что $y = 5$. Значит, $x = 1962 : 9 = 218$.

Ответ: 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226 и 227.

Задача №4. Художник-авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 7×7, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна — ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 31 клетку. Побейте его рекорд — закрасьте а) 32 клетки — [*2 балла*]; б) 33 клетки — [*3 балла*]. (И. Акулич)



Решение. Если мы умеем закрашивать 33 клетки, то 32 клетки можно закрасить, вовремя остановившись. Три примера, в которых закрашены 33 клетки, изображены на рисунке (на самом деле, таких примеров гораздо больше). Больше 33 клеток закрасить нельзя — это проверено на компьютере.



Задача №5. Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю», и по ответу на который Вы сможете понять, какие монеты ему достались. [***6 баллов***] (А. Чеботарёв)

Решение. Вот пример такого вопроса: «Правда ли, что у тебя золотых монет больше, чем у Алёши Поповича?»

Если у Ильи Муромца две золотые монеты, он скажет «да», поскольку у Алёши Поповича не может быть больше одной золотой монеты.

Если обе монеты Ильи серебряные, то у Алёши хотя бы одна золотая, и Илья Муромец ответит «нет».

Ну а если ему достались разные монеты, то он ответит «не знаю», так как у Алёши может оказаться как две золотые, так и две серебряные монеты.

Конечно, можно было задать и другие вопросы, например:

— Правда ли, что одному из двух других богатырей достались две серебряные монеты?

— Верно ли, что два других богатыря получили хотя бы по одной золотой монете каждый?

— Если я заберу у тебя одну монету и дам вместо неё золотую, станет ли у тебя больше золотых?

(Заметьте, что в последнем вопросе не упоминаются монеты двух других богатырей, а только монеты, доставшиеся Илье Муромцу!)

Задача №6. Айрат выписал подряд все числа месяца:

$$123456789101112\ldots$$

и покрасил три дня (дни рождения своих друзей), никакие два из которых не идут подряд. Оказалось, что все непокрашенные участки состоят из одинакового количества цифр. Докажите, что первое число месяца покрашено. [***8 баллов***] (И. Григорьева)

Решение. Допустим, число 1 не покрашено. Если наименьшее из покрашенных чисел двузначное, то первый из непокрашенных участков состоит из нечётного числа цифр, а все остальные — из чётного числа цифр. Если же наименьшее из покрашенных чисел однозначное, то первый из непокрашенных участков состоит не более чем из 8 цифр. Но это слишком мало: покрашенных цифр в этом случае не более 5, непокрашенных — не более $8 \cdot 4 = 32$, итого — не более 37 цифр, а даже самый короткий месяц (февраль невисокосного года) даёт 47 цифр. В обоих случаях получили противоречие. Значит, число 1 должно быть покрашено.

7 класс

Задача №1. 2002 год — год-палиндром, то есть одинаково читается справа налево и слева направо. Предыдущий год-палиндром был 11 лет назад (1991). Какое максимальное число годов-непалиндромов может идти подряд (между 1000 и 9999 годами)? [***5 баллов***] (Г. Гальперин, Д. Григоренко)

Решение. Пусть сейчас год-палиндром, имеющий вид $\overline{abba}$. Когда наступит следующий такой год? Рассмотрим два случая:

а) $b = 9$ (год вида $\overline{a99a}$). Тогда через 11 лет наступит еще один год-палиндром: $\overline{(a+1)00(a+1)}$. Например, годы 3993 и 4004.

б) $b < 9$. В этом случае следующий год-палиндром наступит через 110 лет:

$$\frac{\overline{abba}}{\overline{a(b+1)(b+1)a}}$$

Например, годы 9339 и 9449. Поэтому наибольшее число годов-непалиндромов подряд — 109.

Ответ: 109 лет.

Задача №2. См. задачу 6.2. [***5 баллов***]

Задача №3. В написанном на доске примере на умножение хулиган Петя исправил две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите исходный пример и объясните, как Вы это сделали.[***5 баллов***] (И. Ященко)

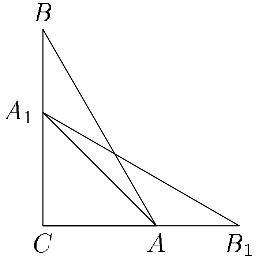
Решение. В получившемся примере три сомножителя чётные, значит, в исходном примере хотя бы один тоже был чётным. Поэтому и произведение было чётным числом, то есть последняя цифра произведения была изменена. Таким образом, слева изменено не более одной цифры. Значит, в исходном примере слева были и пятёрки, и четвёрки, а оканчивалось произведение на 0.

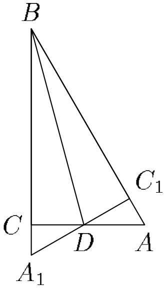
Запись числа $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 1600$ отличается от записи 2240 более чем на одну цифру. Из этого можно заключить, что один из сомножителей исправлен. Если исправлена четвёрка, то произведение должно делиться на $4^2 \cdot 5^2 = 400$, а 2240 на 400 не делится, так что исправлена одна из пятёрок.

Ответ: $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 = 2240$ (или $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2240$).

Задача №4. У Васи есть пластмассовый угольник (без делений) с углами 30°, 60° и 90°. Ему нужно построить угол в 15°. Как это сделать, не используя других инструментов? [***5 баллов***] (М. Панов)

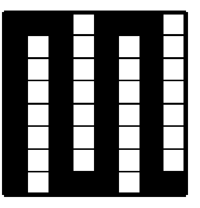
Решение. Приводим два возможных решения (без сомнения, есть много других):



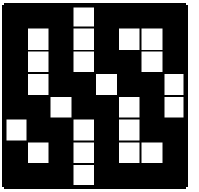


$\angle A_1AB$ — искомый $\qquad \angle A_1BD = \angle ABD$ — искомый

Задача №5. Художник-авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 8×8, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна — ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 36 клеток. Побейте его рекорд! (За 39 клеток — [***2 балла***], за каждую следующую клетку — ещё [***по 2 балла***]. Жюри умеет закрашивать 42 клетки!) (И. Акулич)



Решение. Пример изображён на рисунке. (Существуют и другие примеры закрашивания 42 клеток. Закрасить 43 клетки невозможно.)



Задача №6. В шахматном турнире на звание мастера спорта участвовало 12 человек, каждый сыграл с каждым по одной партии. За победу в партии даётся 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков. По итогам турнира звание мастера спорта присваивали, если участник набрал более 70% от числа очков, получаемых в случае выигрыша всех партий. Могли ли получить звание мастера спорта а) 7 участников [*4 балла*]; б) 8 участников [*6 баллов*]? (Е. Иванова)

Решение. Докажем от противного, что получить звание мастера могли не более 7 участников турнира. Пусть их было 8. Тогда каждый набрал не менее $0{,}7 \cdot 11 = 7{,}7$ очка, то есть не менее 8 очков. Таким образом, все они в сумме набрали не менее $8 \cdot 8 = 64$ очков. При этом в партиях с участниками, не получившими звание мастера, каждый из них набрал не более 4 очков (даже если выиграл все партии). Это даёт не более $4 \cdot 8 = 32$ очков.

Значит, участники, ставшие мастерами, должны были набрать в партиях между собой не менее 32 очков.

Подсчитаем, сколько партий сыграли между собой эти 8 мастеров. Если мы будем результаты партий записывать в таблицу 8×8, то у нас останется свободной диагональ (так как партий с самим собой не играется) и на каждую партию будет выделено по две клетки: в строке одного из игроков и в строке другого. Таким образом, партий будет $\frac{8 \cdot 8 - 8}{2} = 28$. В каждой партии разыгрывается одно очко, поэтому в этих партиях мастера в сумме наберут ровно 28 очков, что меньше 32. Противоречие.

Если же звание мастера получили 9 или более участников, то они должны были набрать не менее 72 очков, в то время как всего в турнире разыгрывалось $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ очков.

Теперь приведём пример турнира, в котором звание мастера получили 7 участников. Пусть первые 7 (по списку) участников всегда выигрывали у последних 5, а все остальные партии завершились вничью. Тогда первые 7 участников набрали по $1 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 6 = 8$ очков, а последние 5 — по $0 \cdot 7 + 0{,}5 \cdot 4 = 2$ очка.

Информация о наборе в некоторые московские школы и классы с углублённым изучением предметов на 2002/2003 учебный год.

Школа	Телефон	Адрес	Набираемые классы	Сроки
2	137–1769 137–6931	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	физико-математ.: 7, 8, добор в 9 и 10	апрель–май
7	131–8110	ул. Крупской, 17 (м. «Университет»)	8 математический добор в 9–10 матем.	апрель–май
18 СУНЦ МГУ	445–1108	ул. Кременчугская, 11 (м. «Кутузовская»)	10 физико-математ. 10 химический 11 физмат, 11 инф.	29.04.2002 11.05.2002
54	245–9972 245–5425	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	9 математический	апрель–май
57	291–8572 291–5458	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8 математический 9 математический 9 гуманитарный	апрель
91	290–3558	ул. Поварская, 14 (м. «Арбатская»)	9 математический	3 и 8 апреля
109	434–5106 434–5107	ул. Бакулева, 20 (м. «Юго-Западная»)	9 физико-математ.	запись на экзамены с 1 марта
218	976–0320 976–4087	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 математический 8 гуманитарный 9 добор (индивид. учебные планы)	апрель
1134	932–0000 932–0801	ул. Раменки, 15, к. 1 (м. «Проспект Вернадского»)	9 физико-математ. 9 филологический 9 естеств.-научный	06.04.2001
1543	433–1644 434–2644	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, к. 5 (м. «Юго-Западная»)	8 математический 8 гуманитарный 8 биологический	апрель
1553	959–9950	ул. Донская, 37 м. «Шаболовская»	8 9	26.01.2002 27.01.2002

Более подробно о наборе в эти и другие школы можно узнать на сайте `http://www.mccme.ru`