Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Дом научно-технического творчества молодёжи
Московский центр непрерывного математического образования

LXVI Московская математическая олимпиада

Математический праздник

В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, Т. И. Голенищева-Кутузова, В. М. Гуровиц, Е. Ю. Иванова, Т. В. Караваева, Т. А. Карпова, В. А. Клепцын, Г. А. Колюцкий, Е. В. Корицкая, Ю. Г. Кудряшов, Н. А. Кулакова, П. И. Митричев, А. В. Спивак, В. В. Трушков, Р. М. Федоров, А. В. Хачатурян, А. С. Чеботарев, И. В. Ященко.

Москва
16 февраля 2003 года

6 класс

Задача 1. Один мальчик 16 февраля 2003 года сказал: «Разность между числами прожитых мною месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111». Когда он родился? [*4 балла*] (С. Токарев.)

Ответ. 16 января 1993 года.

Решение. Пусть мальчик прожил x лет и еще y месяцев. Тогда он прожил всего $12x + y$ месяцев и поэтому

$$12x + y - x = 111,$$

то есть

$$11x + y = 11 \cdot 10 + 1.$$

Поскольку $y < 12$, то $y = 1$ и $x = 10$.

Задача 2. Найдите наименьшее четырехзначное число $\mathtt{СЕЕМ}$, для которого существует решение ребуса

$$\mathtt{МЫ} + \mathtt{РОЖЬ} = \mathtt{СЕЕМ}.$$

(Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.) [*4 балла*] (С. Токарев, А. Хачатурян.)

Ответ. 2003.

Решение. Поскольку $\mathtt{С} > \mathtt{Р}$, то $\mathtt{С} > 1$. Так как мы ищем наименьшее число, попробуем взять $\mathtt{Р} = 1$, $\mathtt{С} = 2$ и $\mathtt{Е} = 0$. Тогда $\mathtt{М} \geqslant 3$. Случай $\mathtt{СЕЕМ} = 2003$ возможен: $35+1968 = 2003$ или $38+1965 = 2003$.

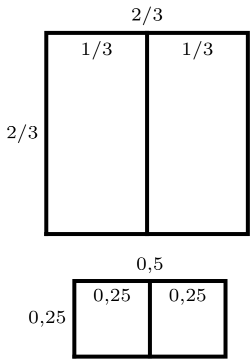
Кроме указанных решений, ребус, как легко проверить при помощи компьютерной программы, имеет еще 38 решений:
$31+4972=5003$, $32+4971=5003$, $31+5972=6003$, $32+5971=6003$, $81+3927=4008$, $87+3921=4008$, $61+2945=3006$, $65+2941=3006$, $81+4927=5008$, $14+2987=3001$, $17+2984=3001$, $87+4921=5008$, $15+2986=3001$, $16+2985=3001$, $81+5927=6008$, $87+5921=6008$, $41+7963=8004$, $71+4936=5007$, $43+7961=8004$, $76+4931=5007$, $15+3986=4001$, $16+3985=4001$, $61+7945=8006$, $65+7941=8006$, $46+1958=2004$, $48+1956=2004$, $14+5987=6001$, $17+5984=6001$, $57+1948=2005$, $58+1947=2005$, $83+6925=7008$, $85+6923=7008$, $46+2958=3004$, $48+2956=3004$, $24+5978=6002$, $57+2948=3005$, $28+5974=6002$, $58+2947=3005$.

Задача 3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий? [***4 балла***] (С. Токарев.)

Ответ. Один.

Решение. Если первый — рыцарь, то в силу его слов второй и третий — лжецы, что невозможно из-за высказывания второго островитянина. Значит, первый — лжец. Если второй — лжец, то в силу его слов третий тоже лжец, но тогда первый сказал правду, а он должен был соврать. Значит, второй — рыцарь. В силу его слов третий тоже рыцарь. Третий честно ответит: «Один».

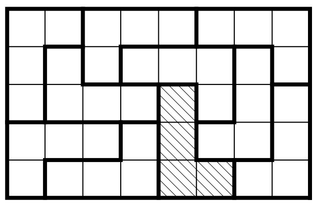
Задача 4. Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых — целое число метров. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника — тоже целое число метров? [***5 баллов***] (А. Спивак.)



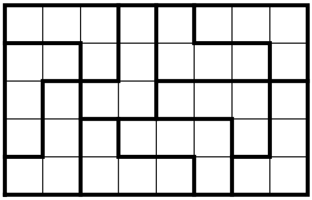
Ответ. Нет.

Решение. Например, квадрат со стороной 2/3 можно разрезать средней линией на два прямоугольника, периметры которых равны 2. Есть и другие примеры.

Задача 5. В распоряжении юного паркетчика имеются 10 одинаковых плиток, каждая из которых состоит из 4 квадратов и имеет форму буквы Г (все плитки ориентированы одинаково). Может ли он составить из них прямоугольник размером 5×8? (Плитки можно поворачивать, но нельзя переворачивать. Например, на рисунке изображено неверное решение: заштрихованная плитка неправильно ориентирована.) [***7 баллов***] (А. Спивак.)



Ответ. Да, можно:



Задача 6. На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырех боковых гранях оказалась равна 12, во второй — 15. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

[***8 баллов***] (А. Кустарёв.)

Ответ. 6.

Решение. Поскольку $1+2+3+4+5+6=21$ и $21-12=9$, а $21-15=6$, то в первый раз сумма чисел нижней и верхней граней кубика равнялась 9, а во второй — 6. Бросим кубик третий раз так, чтобы он упал на одну из тех двух граней, которые оба раза были боковыми. Поскольку $21-9-6=6$, то сумма чисел, которые при третьем броске оказались на верхней и нижней гранях, равна 6. Очевидно, цифра 3 не могла ни во второй, ни в третий раз оказаться на верхней или нижней грани: иначе напротив нее стояла бы цифра $6-3=3$, а тройка только одна. Значит, тройка была на верхней или нижней грани при первом броске. Поэтому напротив тройки стоит цифра $9-3=6$.

Примечание. Удовлетворяющий условию задачи кубик существует: $1+5=2+4=6$ и $3+6=9$.

7 класс

Задача 1. Расставьте скобки и знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6009} = 2003.$$

[***4 балла***]

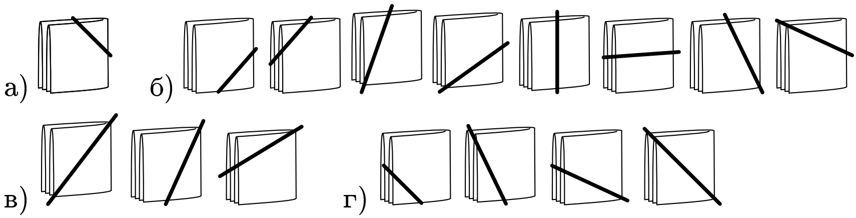
(Т. Голенищева-Кутузова, И. Ященко.)

Ответ. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right):\frac{1}{6009}=2003.$

Задача 2. Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам еще раз. Получившийся квадратик разрезали ножницами (по прямой). Могла ли салфетка распасться а) на 2 части? б) на 3 части? в) на 4 части? г) на 5 частей? Если да — нарисуйте такой разрез, если нет — напишите слово «нельзя». [***6 баллов***] (А. Чеботарёв.)

Ответ. Во всех пунктах можно.

Решение. На рисунке изображены все возможные варианты разрезания салфетки.



Задача 3. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф. [***5 баллов***] (О. Карпенков.)

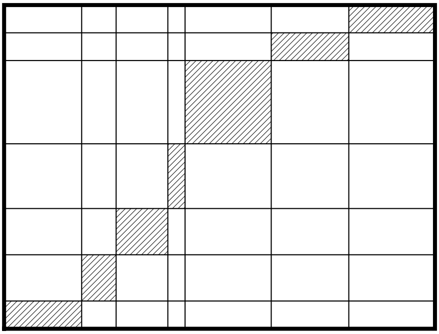
Ответ. 2222232.

Решение. Так как двоек больше, чем троек, двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр — 17, во втором — 16, в третьем — 15, а в последнем — 14. По признаку делимости на 3 число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Значит, годится только третий вариант.

Итак, в коде 6 двоек и 1 тройка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, должно делиться на 4. Значит, это 32.

Задача 4. Прямоугольник разрезали шестью вертикальными и шестью горизонтальными разрезами на 49 прямоугольников (см. рисунок). Оказалось, что периметр каждого из получившихся прямоугольников — целое число метров. Обязательно ли периметр исходного прямоугольника — целое число метров? [***8 баллов***] (В. Произволов.)

Ответ. Да, обязательно.



Решение. Рассмотрим прямоугольники, заштрихованные на рисунке («диагональные»). Горизонтальная сторона исходного прямоугольника складывается из их горизонтальных сторон. То же — для вертикальной стороны.

Поэтому периметр исходного прямоугольника равен сумме периметров заштрихованных прямоугольников. Периметр каждого из этих прямоугольников — целое число метров. Их сумма — тоже целое число метров.

Задача 5. В честь праздника 1% солдат в полку получили новое обмундирование. Солдаты расставлены в виде прямоугольника так, что солдаты в новом обмундировании оказались не менее чем в 30% колонн и не менее чем в 40% шеренг. Какое наименьшее число солдат могло быть в полку? [***8 баллов***] (Р. Фёдоров.)

Ответ. 1200.

Решение. Предположим, что солдаты поставлены в m колонн и n шеренг. Тогда в полку mn солдат и $\frac{mn}{100}$ солдат получили новое обмундирование. Согласно условию, не менее чем в $\frac{40n}{100}$ шеренг есть хотя бы по одному солдату в новом обмундировании, значит,

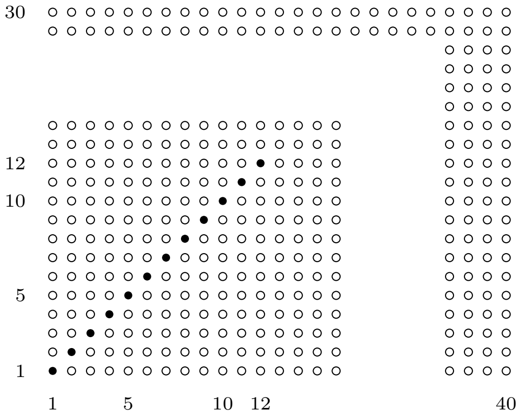
$$\frac{mn}{100} \geqslant \frac{40n}{100}.$$

Отсюда ясно, что $m \geqslant 40$. Аналогично, так как не менее чем в $\frac{30m}{100}$ колонн есть солдаты в новом обмундировании,

$$\frac{mn}{100} \geqslant \frac{30m}{100}.$$

Поэтому $n \geqslant 30$. Значит, в полку не менее, чем $40 \cdot 30 = 1200$ солдат.

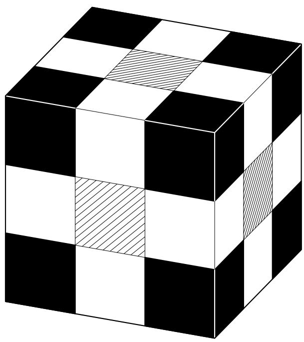
Покажем, что 1200 солдат можно построить таким образом. Построим их в виде прямоугольника 30×40. Поставим по диагонали 12 солдат в новом обмундировании (см. рисунок). Ясно, что солдаты в новом обмундировании стоят ровно в 30% колонн и в 40% шеренг (30% от 40 — это 12, 40% от 30 — тоже 12).



Задача 6. Куб размером $3 \times 3 \times 3$ состоит из 27 единичных кубиков. Можно ли побывать в каждом кубике по одному разу, двигаясь следующим образом: из кубика можно пройти в любой кубик, имеющий с ним общую грань, причем запрещено ходить два раза подряд в одном направлении? [***9 баллов***] (С. Токарев.)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что можно. В кубе 8 угловых кубиков (на рисунке они покрашены в черный цвет) и 6 «центральных» кубиков (они расположены в центрах граней и заштрихованы на рисунке). Нетрудно видеть, что любой ход из углового кубика ведет в кубик в середине ребра, а следующий ход — в центральный кубик. Таким образом, чтобы попасть из одного углового кубика в другой, придется пройти хотя бы через один центральный. Иными словами, между каждыми двумя соседними (в порядке обхода) угловыми кубиками должен встретиться хотя бы один центральный. Значит, центральных кубиков не меньше семи, а их всего лишь шесть!



ИНФОРМАЦИЯ

о наборе в некоторые московские школы и классы
с углублённым изучением предметов на 2003/2004 уч. год.

Школа	Телефон	Адрес	Набираемые классы	Сроки
2	137 17 69 137 69 31	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	7 физико-математ., 8 инф.-математ., добор в 9 и 10 физико-математ.	апрель –май
18 СУНЦ МГУ	445 11 08	ул. Кременчугская, 11 (м. «Кутузовская»)	10 физико-математ., 10 хим., 10 био-физ., 10 комп.-информ., 11 физико-математ.	апрель –май
54	245 99 72 245 54 25	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	9 математ.	с марта
57	291 85 72 291 54 58	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8 математ., 9 математ., 9 гуманит.	апрель
91	290 35 58	ул. Поварская, 14 (м. «Арбатская»)	9 математ.	апрель
109	434 51 06 434 51 07	ул. Бакулева, 20 (м. «Юго-Западная»)	9 физико-математ.	март
179	292 01 05	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	9 физико-математ.	март– апрель
218	976 03 20 976 40 87	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 инд. уч. планы с углубл. изучением математ., физики, биол. (по выбору); добор: 9 математ., 9 гуманит., 10 инд. уч. планы.	апрель
1101	339 77 39	ул. Академика Варги, 34	7–10 математ.	апрель
1134	932 00 00 932 08 01	ул. Раменки, 15, корп. 1 (м. «Просп. Вернадского»)	9 физико-математ.	с марта
1543	433 16 44 434 26 44	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8 математ., 8 гуманит., 8 биол.	апрель

Более подробно о наборе в эти и другие школы можно узнать на сайте `http://www.mccme.ru`