ББК 22.3я721+74.262.22
З15

З15

Задачи Московской региональной олимпиады школьников по физике 2006 года: Под ред. М. В. Семёнова, А. А. Якуты — М.: МЦНМО, 2007. — 56 с.: ил.

ISBN 978–5–94057–272–5

Приводятся условия и решения задач городского этапа Московской региональной олимпиады школьников по физике (теоретические туры, 7–11 классы) 2006 года, окружного этапа олимпиады в 11 классе, а также краткие описания практических работ экспериментального тура (9–11 классы).

Для участников олимпиады, школьников, учителей, родителей, руководителей школьных кружков, организаторов олимпиад.

ББК 22.3я721+74.262.22

Тексты заданий, решений, комментариев и иллюстрации составили и подготовили: Ромашка М. Ю., Зильберман А. Р., Шведов О. Ю., Семёнов М. В., Варламов С. Д., Якута А. А., Харабадзе Д. Э., Парфёнов К. В., Пуздырев Я. В., Горбатый И. Н., Селиверстов А. В., Манюков М. А, Старокуров Ю. В.

Электронная версия `http://www.mccme.ru/olympiads/mfo/` (www-сервер МЦНМО).

Задачи Московской региональной олимпиады
школьников по физике 2006 года.

Технический редактор
Кулыгин Алексей Кириллович

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подп. к печати 30.01.2007.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Печать офсетная. Объём 4,5 печ. л.
Заказ . Тираж 1000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский переулок, дом 11.
Телефоны: (495)241–05–00, (495)241–12–37, (495)241–72–85.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы»

978–5–94057–272–5

Задачи Московской региональной олимпиады школьников по физике 2006 года

Москва
Издательство МЦНМО
2007

Предисловие

В 2006 году олимпиада школьников по физике состоялась в городе Москве в шестьдесят седьмой раз. Олимпиада проводилась в соответствии с Положением о московской региональной олимпиаде школьников[1].

В соответствии с Положением, олимпиада проводится ежегодно Департаментом образования города Москвы, Советом ректоров вузов Москвы и Московской области, окружными управлениями образования, образовательными учреждениями, при участии образовательных учреждений, научных организаций и обществ. Координацию организационно-финансового обеспечения проведения Олимпиады осуществляет по поручению Департамента Московский институт открытого образования (МИОО).

В олимпиаде могут принимать участие все желающие школьники.

Олимпиада проводится в три этапа.

Школьный этап проводится общеобразовательными учреждениями по заданиям, рекомендованным методической комиссией по предмету.

Окружной этап проводится окружным оргкомитетом, по заданиям, рекомендованным методической комиссией по предмету. По согласованию с Городским оргкомитетом допускается проведение окружного этапа Олимпиады вузом или группой вузов при условии соблюдения Положения, согласования с Городским оргкомитетом сроков и с методической комиссией по предмету — заданий Олимпиады.

Городской этап проводится Городским оргкомитетом, по заданиям, рекомендованным методической комиссией по предмету.

В соответствии с Положением о Всероссийской олимпиаде школьников[2] городской этап олимпиады города Москвы приравнивается к 4-му этапу Всероссийской олимпиады школьников. Окружной этап Олимпиады приравнивается к 3-му этапу Всероссийской олимпиады школьников. Положениями о Московской региональной олимпиаде школьников и о Всероссийской олимпиаде школьников для победителей (диплом первой степени) и призёров (дипломы второй и третьей степени) третьего (окружного) и четвёртого (городского) этапов олимпиады предусмотрены льготы при поступлении в вузы.

[1] Приказ Департамента образования г. Москвы от 26.12.2003 № 1083 «О введении Положения о московской региональной олимпиаде школьников», опубл. **http://www.educom.ru/ru/dialog/olympiads/order.php**

[2] Утверждено приказом Минобразования России от 30.10.2003 № 4072, опубл. **http://www.educom.ru/ru/dialog/olympiads/thesis.php**

В 2005/2006 учебном году окружной этап Московской региональной олимпиады школьников по физике состоялся 4 февраля 2006 года. Для 11-классников этот этап проводился на Физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и в вузах города Москвы. В данной брошюре приводятся задачи (с решениями) варианта 11 класса, разработанного городской Методической комиссией. Большая часть вузов, принимавших участие в проведении окружного этапа олимпиады, в соответствии с Положением, проводила окружной этап по своим вариантам, согласованным с городской Методической комиссией.

Городской этап олимпиады для учеников 7-х классов проводился в один тур и 8–11-х классов — в два тура. Первый прошёл 19 февраля 2006 года на физическом факультете МГУ, в нём приняли участие 1704 человека (7 кл. — 190, 8 кл. — 253, 9 кл. — 320, 10 кл. — 448, 11 кл. — 493).

На второй теоретический тур (состоялся 5 марта 2006 г.) были приглашены ученики 8–11 классов, показавшие лучшие результаты в первом туре (и/или имеющие персональные приглашения), в количестве: 8 кл. — 143 чел., 9 кл. — 132 чел., 10 кл. — 164 чел., 11 кл. — 214 чел.

По результатам первого тура в 7 классе и второго тура в 8–11 классах победителями и призёрами олимпиады были признаны 49 учащихся 7 класса, 49 учащихся 8 класса, 53 учащихся 9 класса, 56 учащихся 10 класса, 54 учащихся 11 класса (всего 261 человек). С полным списком победителей и призёров можно ознакомиться в сети Internet по адресу **http://genphys.phys.msu.ru/ol/2006**

В данной брошюре опубликованы все задачи первого и второго теоретических туров с подробными решениями.

По итогам второго тура в 9–11 классах 48 школьников были приглашены на экспериментальный тур (прошёл 11 марта 2006 года в МИОО). Экспериментальный тур в настоящее время не влияет на распределение дипломов победителей и призёров олимпиады; он проводится с целью отбора кандидатов в сборную команду г. Москвы для участия в заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по физике.

В настоящей брошюре опубликованы краткие описания заданий, предлагавшихся на экспериментальном туре.

Электронная версия настоящей брошюры, а также материалы Московской физической олимпиады ряда лет опубликованы на сервере Московского центра непрерывного математического образования (**http://www.mccme.ru/olympiads/mfo**). Оперативная информация об олимпиаде и списки победителей публикуются на странице кафедры общей физики Физического факультета МГУ (**http://genphys.phys.msu.ru/ol**).

Окружной этап

Состоялся 4 февраля 2006 года.

11 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

1. На горизонтальной плоскости сидит лягушка. Навстречу ей издалека катится барабан радиусом R. Центр барабана движется со скоростью v. С какой наименьшей скоростью должна подпрыгнуть лягушка, чтобы перепрыгнуть барабан, слегка коснувшись его только в верхней точке? Размерами лягушки пренебречь.

Решение. Заметим, что в движущейся системе отсчёта, связанной с центром барабана, ввиду его равномерного движения лягушка после прыжка будет двигаться по параболе. Направим ось X в этой системе по горизонтали вдоль плоскости в направлении от лягушки к барабану, а ось Y — вертикально вверх. Начало отсчёта данной системы координат поместим на плоскости в том месте, где сидела лягушка, и будем отсчитывать время от момента прыжка. Значит, если лягушка прыгает в неподвижной системе отсчёта под углом α к горизонту со скоростью W, имеющей горизонтальную составляющую W_x и вертикальную составляющую W_y, то зависимость координат лягушки от времени t во введённой нами движущейся системе координат будет иметь вид:

$$x = (W_x + v)t, \qquad y = W_y t - \frac{gt^2}{2}.$$

Максимальная высота подъёма, очевидно, равна $y_0 = W_y^2/(2g)$ и должна совпадать с удвоенным радиусом цилиндра $2R$. Отсюда получается, что $W_y^2 = 4gR$. Эта высота достигается в момент времени $t_0 = W_y/g$ в точке с координатой $x_0 = (W_x + v)t_0 = W_y(W_x + v)/g$. Выразив время из зависимости $x(t)$ и подставив его в зависимость $y(t)$, получим уравнение траектории движения лягушки:

$$y = \frac{W_y x}{W_x + v} - \frac{gx^2}{2(W_x + v)^2} = y_0 - \frac{g(x - x_0)^2}{2(W_x + v)^2}$$

(последнее равенство легко проверяется подстановкой; оно становится очевидным, если перенести начало системы координат в точку касания плоскости и барабана). Вблизи верхней точки параболы, находящейся в точке (x_0, y_0), это уравнение должно совпадать с уравнением окружности радиусом R с центром в точке (x_0, R):

$$y_0 - \frac{g(x-x_0)^2}{2(W_x+v)^2} = R + \sqrt{R^2-(x-x_0)^2} \approx 2R - \frac{(x-x_0)^2}{2R}.$$

Отсюда получаем: $(W_x+v)^2 = gR$, откуда $W_x = \sqrt{gR} - v$.

Следовательно, величина скорости лягушки в неподвижной системе отсчёта равна

$$W = \sqrt{W_y^2 + W_x^2} = \sqrt{4gR + \left(\sqrt{gR}-v\right)^2} = \sqrt{5gR + v^2 - 2v\sqrt{gR}},$$

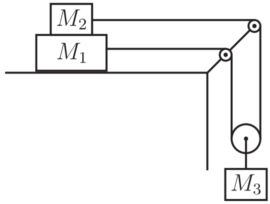
и она должна быть направлена под таким углом α к горизонту, чтобы

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{W_y}{W_x} = \frac{2\sqrt{gR}}{\sqrt{gR}-v}$$

Отметим, что при $v < \sqrt{gR}$ лягушка должна прыгать навстречу катящемуся барабану, а при $v \geqslant \sqrt{gR}$ — вертикально вверх.

Замечание. Задачу можно решить проще, воспользовавшись понятием радиуса кривизны траектории. Действительно, в движущейся системе отсчёта радиус кривизны $R_{\text{кр}}$ траектории лягушки в верхней точке должен превышать R (траектория касается барабана), а ускорение лягушки имеет только нормальную составляющую, равную g. Отсюда получаем: $R_{\text{кр}} = (W_x+v)^2/g \geqslant R$, то есть $W_x \geqslant \sqrt{gR} - v$. Вертикальная составляющая скорости лягушки, очевидно, должна быть такой, чтобы она могла перепрыгнуть барабан высотой $2R$, то есть $W_y = \sqrt{2g \cdot 2R} = 2\sqrt{gR}$. Отсюда сразу следует ответ.

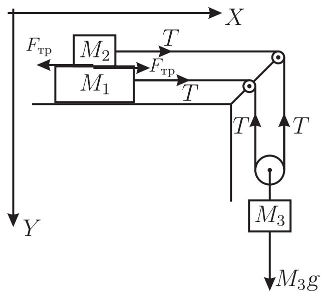
2. На гладкой горизонтальной плоскости лежит брусок массой M_1 и на нём — другой брусок массой M_2. Через систему блоков, изображённую на рисунке, перекинута нить. К подвижному блоку подвешен груз массой $M_3 = M_1 + M_2$. При каком соотношении масс M_1 и M_2 бруски не будут скользить друг по другу, если коэффициент трения между ними равен μ? Нить считать невесомой и нерастяжимой, массой блоков и трением в них пренебречь.



Решение. Пусть сила натяжения нити, перекинутой через блоки, равна T, а сила трения между брусками равна $F_{\text{тр}}$ (см. рис.) Запишем уравнения движения брусков и груза в проекциях на горизонтальную ось X, направленную вправо, и вертикальную ось Y, направленную вниз:

$$\begin{aligned}&M_1a_1 = T \pm F_{\text{тр}},\\&M_2a_2 = T \mp F_{\text{тр}},\\&M_3a = (M_1 + M_2)g - 2T.\end{aligned}$$

Здесь a_1, a_2 и a — ускорения брусков M_1, M_2 и груза M_3, соответственно. Знаки $\pm$ и $\mp$ перед величиной $F_{\text{тр}}$ в уравнениях соответствуют тому, что сила трения, в зависимости от направления возможного (т. е. в отсутствие трения) относительного движения брусков, может иметь как положительную, так и отрицательную проекцию на ось X.



Так как подвижный блок даёт выигрыш в силе в два раза, но не даёт выигрыша в работе, то при смещении бруска M_1 на расстояние Δx_1, а бруска M_2 на расстояние Δx_2 груз M_3 смещается на расстояние $\Delta y = (\Delta x_1/2) + (\Delta x_2/2)$. Поэтому ускорения брусков и груза связаны уравнением кинематической связи: $2a = a_1 + a_2$.

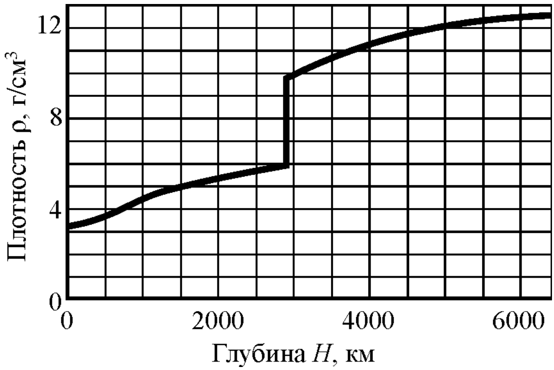
При отсутствии скольжения брусков друг по другу их ускорения равны: $a_1 = a_2$. В этом случае из уравнения кинематической связи следует, что $a_1 = a_2 = a$. Складывая друг с другом три первых уравнения, получим, что $a = g/2$. Подставляя это значение в третье уравнение, найдём: $T = (M_1 + M_2)g/4$. Далее, из первого или второго уравнения определим силу трения: $F_{\text{тр}} = (M_1 - M_2)g/4$. При отсутствии скольжения брусков друг по другу $F_{\text{тр}}$ является силой трения покоя, поэтому её величина не может превышать значение $\mu M_2 g$, то есть: $|(M_1 - M_2)g/4| \leqslant \mu M_2 g$.

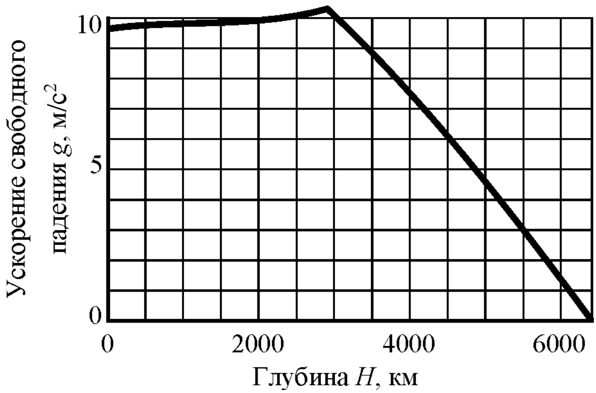
Отсюда получаем ответ: $1 - 4\mu \leqslant M_1/M_2 \leqslant 1 + 4\mu$.

3. Земля, по современным геофизическим данным, состоит из трёх основных слоёв: коры (её толщина очень мала по сравнению с остальными слоями), мантии и ядра. При этом бóльшая часть вещества Земли находится в жидком (расплавленном) состоянии. В Физической энциклопедии приводятся следующие графики зависимости плотности ρ земного вещества и ускорения свободного падения g от глубины H.

Оцените, то есть рассчитайте приближённо, давление в центре Земли (для такой оценки зависимости $\rho(H)$ и $g(H)$ можно разумным образом упростить). Попытайтесь объяснить также, почему до глубин порядка

3000 км ускорение свободного падения g возрастает.





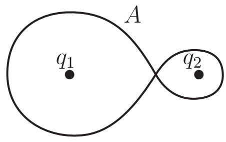
Решение. Исходя из условия задачи, воспользуемся моделью жидкой Земли. Слой жидкости плотностью ρ и толщиной ΔH создаёт гидростатическое давление $\Delta p = \rho g \Delta H$, где g — ускорение свободного падения. Поскольку ρ и g изменяются с глубиной H, то вычисление давления «в одну строчку» невозможно. Обратим внимание на то, что создаваемое слоем жидкости гидростатическое давление для всех нижележащих слоёв будет внешним. Таким образом, по закону Паскаля это давление добавляется к гидростатическому давлению нижележащих слоёв. Отсюда получаем алгоритм решения задачи.

Разобьём Землю на слои толщиной ΔH и рассчитаем добавку к давлению в центре Земли от каждого слоя. Для этого перемножим ΔH и средние значения $\rho_{\text{ср}}$ и $g_{\text{ср}}$, относящиеся к середине каждого слоя. Затем сложим все добавки и получим оценку для давления в центре Земли (см. таблицу): $p_ц \approx 3{,}5 \cdot 10^{11}$ Па $= 3{,}5$ Мбар (1 бар $= 10^5$ Па). Это значение хорошо согласуется с приведённым в Физической энциклопедии: $p_ц = 3{,}6$ Мбар. При разбиении на слои разной толщины наши оценочные значения, естественно, могут различаться, но разумной является оценка в пределах 3–4 Мбар.

H, км	ΔH, км	$\rho_{ср}$, г/см^3	$g_{ср}$, м/с^2	$\Delta p(H) = \rho_{ср}\, g_{ср}\, \Delta H$, 10^{10} Па
0	500	3,5	9,8	1,72
500	500	4,0	9,9	1,98
1000	500	4,8	9,9	2,38
1500	500	5,1	10,0	2,55
2000	500	5,5	10,0	2,75
2500	400	5,9	10,3	2,43
2900	600	10,3	9,6	5,93
3500	500	11,0	8,2	4,51
4000	500	11,5	6,8	3,91
4500	500	12,0	5,3	3,18
5000	500	12,2	3,8	2,32
5500	500	12,3	2,1	1,29
6000	400	12,5	0,8	0,40
6400	—	—	—	—
Итого				35,35

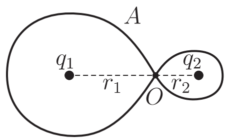
Относительно роста величины g с глубиной вплоть до $H \approx 2900$ км можно сказать следующее. Однородные сферические слои, лежащие выше точки наблюдения, не создают дополнительной силы притяжения. Тело, находящееся на глубине H, притягивается только нижележащими слоями, и ускорение свободного падения на глубине $H = R_З - R$ под поверхностью Земли для него равно, согласно закону всемирного тяготения, $g(H) = GM(R)/R^2$. Здесь $R_З \approx 6400$ км — радиус Земли, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2) — гравитационная постоянная, R — расстояние от центра Земли, $M(R)$ — масса всех слоёв, расположенных ниже глубины H, то есть на расстояниях от центра Земли, меньших R. Поскольку плотность коры и мантии Земли значительно меньше, чем плотность её ядра, то с ростом глубины вплоть до $H \approx 2900$ км величина $M(R)$ убывает немного медленнее, чем R^2, что и приводит к небольшому возрастанию $g(H)$ с глубиной. В пределах ядра Земли плотность почти постоянна, масса $M(R)$ убывает почти пропорционально R^3, и величина $g(H)$ убывает практически линейно по R.

4. Во всех точках кривой A, изображённой на рисунке, потенциал электрического поля, созданного неподвижными точечными зарядами $q_1 = 4$ нКл и $q_2 = 1$ нКл, равен $\varphi = 900$ В. Определите расстояние l между зарядами. Постоянная в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н $\cdot$ м^2/Кл^2.



Решение. Электрическое поле в рассматриваемом случае симметрично относительно оси, проходящей через заряды q_1 и q_2. При вращении кривой A относительно этой оси получим замкнутую поверхность, потенциал во всех точках которой один и тот же (такие поверхности называют эквипотенциальными).

Вектор напряжённости $\vec{E}$ (если он отличен от нуля) в любой точке эквипотенциальной поверхности направлен перпендикулярно к ней. Только в этом случае электрическое поле не совершает работы при переносе пробного заряда из одной точки эквипотенциальной поверхности в любую другую точку этой поверхности.



Заметим, что в точке O (см. рисунок), где самопересекается кривая A, направление нормали к эквипотенциальной поверхности, а, следовательно, и направление вектора $\vec{E}$, не определены. Это возможно только в том случае, когда вектор напряжённости в этой точке равен нулю. Поэтому

$$\frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2},$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точки O до зарядов q_1 и q_2. Запишем также выражение для потенциала в точке O:

$$\varphi = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}.$$

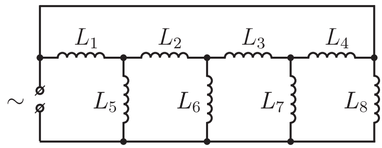
Кроме того, расстояние между зарядами

$$l = r_1 + r_2.$$

Из этих уравнений находим:

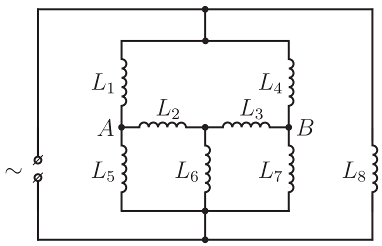
$$l = \frac{k(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}{\varphi} = 9 \text{ см}.$$

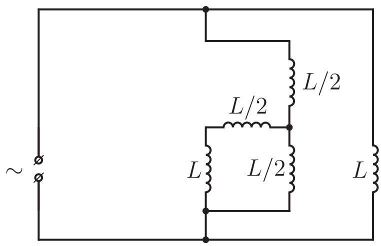
5. Найти индуктивность цепи, изображённой на рисунке. Индуктивности всех катушек в схеме одинаковы и равны L, индуктивностями соединительных проводов и влиянием катушек друг на друга пренебречь.



Решение. Если на входные клеммы этой цепи подаётся переменное синусоидальное напряжение с круговой частотой ω, то индуктивные сопротивления всех катушек будут одинаковы и равны ωL. При этом правила сложения этих сопротивлений будут теми же, что и для схемы, состоящей из резисторов, то есть при последовательном соединении складываются индуктивности, а при параллельном — их обратные величины.

Для расчёта индуктивности вначале перерисуем схему, например, так, как показано на рисунке слева.





Поскольку все индуктивности одинаковы, то из соображений симметрии следует, что потенциалы точек A и B в любой момент времени будут совпадать. Поэтому можно замкнуть их проводником. Получим, что катушки индуктивности L_1 и L_4, L_2 и L_3, L_5 и L_7 соединены параллельно. Значит, схему можно теперь перерисовать так, как показано на рисунке справа, и она будет состоять из катушек с индуктивностями $L/2$ и L, соединённых последовательно и параллельно. Общая индуктивность такой схемы будет равна

$$L_{\text{общ}} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{L} + \cfrac{1}{\cfrac{L}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{L/2} + \cfrac{1}{L + \cfrac{1}{L/2}}}}} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{L} + \cfrac{1}{\cfrac{L}{2} + \cfrac{3L}{8}}} = \frac{7}{15}L.$$

Городской этап. Первый теоретический тур

Состоялся 19 февраля 2006 года.

7 класс

На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

1. Найдите примерную величину давления в центре Земли, считая, что средняя плотность вещества земного шара равна $\rho = 5000$ кг/м^3. Радиус Земли $R_З = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10$ м/с^2.

Решение. На глубине h под поверхностью жидкости давление равно $p = \rho g h$, где ρ — её плотность, а g — ускорение свободного падения. Но мы не можем воспользоваться этой формулой для нахождения давления в центре Земли, поскольку g не остаётся постоянным по мере продвижения вглубь Земли. Действительно, представим себе, что нам удалось просверлить скважину до центра Земли. Ясно, что тело, опущенное в неё до этого центра, будет со всех сторон одинаково притягиваться веществом Земли и находиться в состоянии невесомости, то есть ускорение свободного падения постепенно уменьшается от значения 10 м/с^2 на поверхности Земли до нуля в её центре. Поэтому в формулу для давления надо подставить среднее значение ускорения свободного падения, равное $g/2$. Значит, величина давления в центре Земли примерно равна $p = \rho g R_З/2 \approx 1{,}6 \cdot 10^{11}$ Па $= 1,6$ миллиона атмосфер!

Замечание. По современным представлениям, Земля состоит из трёх основных слоёв — тонкой коры, довольно толстой мантии (около 3000 км), сложенной из пород сравнительно небольшой плотности, и тяжёлого (железного) ядра. Ускорение свободного падения также довольно сложным образом зависит от глубины (см. задачу № 3 окружного этапа, стр. 7). С учётом этого расчёт даёт для давления в центре Земли ещё бóльшую величину: $p_ц \approx 3{,}6$ миллиона атмосфер!

2. Школьники побывали в музее-имении Л. Н. Толстого «Ясная поляна» и возвращались в Рязань на автобусах, которые ехали со скоростью $v_1 = 70$ км/ч. Пошёл дождь, и водители снизили скорость до $v_2 = 60$ км/ч. Когда дождь кончился, до Рязани оставалось проехать $S = 40$ км. Автобусы поехали со скоростью $v_3 = 75$ км/ч и въехали в Рязань в точно запланированное время. Сколько времени шёл дождь? Чему равна средняя скорость автобуса? Для упрощения считайте, что автобусы в пути не останавливались.

Решение. Средняя скорость автобуса — это отношение пройденного пути к затраченному времени. Так как расстояние от «Ясной поляны» до Рязани из-за дождя не изменилось, и время, проведённое школьниками в автобусе, также не изменилось (потому что автобусы въехали в Рязань в точно запланированное время), то средняя скорость совпадает с начальной скоростью $v_{\text{ср}} = 70$ км/ч.

Пусть дождь шёл в течение времени t. Тогда путь, пройденный за это время, составил $v_2 t$. Время, за которое после дождя автобусы проехали оставшееся расстояние, равно S/v_3. Ясно, что время, затраченное автобусами с момента начала дождя до прибытия в Рязань, должно равняться времени, которое потребовалось бы для преодоления того же расстояния с начальной скоростью v_1:

$$t + \frac{S}{v_3} = \frac{v_2 t + S}{v_1}.$$

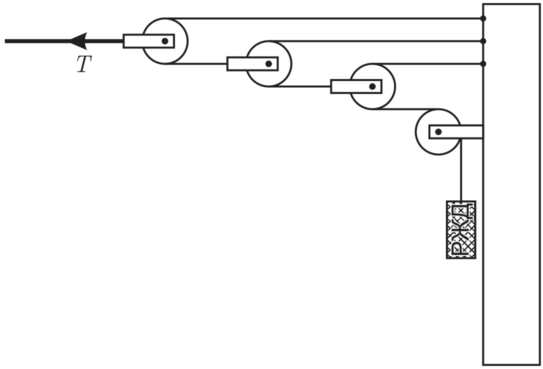
Отсюда находим время, в течение которого шёл дождь:

$$t = \frac{v_1}{v_1 - v_2}\left(\frac{S}{v_1} - \frac{S}{v_3}\right) = \frac{S(v_3 - v_1)}{v_3(v_1 - v_2)} = 16 \text{ минут}.$$

3. Во льдах Арктики в центре небольшой плоской льдины площадью $S = 70$ м^2 стоит белый медведь массой $m = 700$ кг. При этом надводная часть льдины выступает над поверхностью воды на высоту $h = 10$ см. На какой глубине под водой находится нижняя поверхность льдины? Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900$ кг/м^3.

Решение. Обозначим через x искомую глубину. Сила тяжести, действующая на льдину с медведем, равна, очевидно, $g(m + \rho_{\text{л}} S(h + x))$. Она должна равняться силе давления воды на нижнюю поверхность льдины, находящуюся на глубине x, то есть $\rho_{\text{в}} g x S$, поскольку льдина находится в состоянии равновесия. Отсюда получаем: $x = (m + \rho_{\text{л}} h S)/((\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})S) = 1$ м.

4. Провода над железной дорогой, питающие током электропоезда, натягиваются с помощью системы, показанной на рисунке. Она крепится к столбу и состоит из тросов, блоков с изоляторами и стального груза квадратного сечения со стороной $a = 20$ см. Сила натяжения толстого троса, который идёт от крайнего блока к держателю проводов, равна $T = 8$ кН. Какова высота h стального груза? Плотность стали равна $\rho_{\text{с}} = 7800$ кг/м^3. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



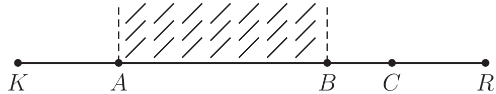
Решение. Легко видеть, что каждый блок, охваченный двумя горизонтальными участками тросов, даёт выигрыш в силе в 2 раза. Значит, три таких блока, изображённые на рисунке, дадут выигрыш в $2^3 = 8$ раз. Сила тяжести, действующая на груз, равна $\rho_c gV$, где $V = a^2 h$ — объём груза. Значит, сила натяжения толстого троса будет в 8 раз больше: $T = 8\rho_c gV$. Отсюда получаем, что объём стального груза составляет $V = T/(8\rho_c g)$, а его длина равна $h = T/(8\rho_c g a^2) \approx 0{,}32$ м $= 32$ см.

8 класс

На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

1. Школьники побывали в селе Константиново, на родине Сергея Есенина, и возвращались к себе домой в Рязань на автобусах. Автобусы ехали со скоростью $v_1 = 70$ км/ч. Пошёл дождь, и водители снизили скорость до $v_2 = 50$ км/ч. Когда дождь кончился, автобусы вновь поехали с прежней скоростью и въехали в Рязань на 10 минут позже, чем было запланировано. Сколько времени шёл дождь?

Решение. Сделаем рисунок и введём на нём следующие обозначения: K — Константиново; R — Рязань; AB — участок, который автобус проехал под дождём за искомое время t; AC — участок, который проехал бы автобус за то же время t, если бы не было дождя.



Ясно, что $BC = AC - AB = (v_1 - v_2)t$. С другой стороны, автобус прошёл путь $KA + AB + CR$ за то же время, за какое было запланировано пройти весь путь KR. Значит, $BC = v_1\Delta t$, где $\Delta t = 10$ минут — время, на которое опоздали автобусы. Приравнивая полученные выражения, имеем: $(v_1 - v_2)t = v_1\Delta t$, откуда $t = v_1\Delta t/(v_1 - v_2)$.

2. В двухлитровую пластиковую бутыль через короткий шланг накачивается воздух до давления 2 атм. Шланг пережимается, и к нему присоединяется герметичный тонкостенный полиэтиленовый пакет большой ёмкости (больше 10 литров) без воздуха внутри. Бутыль вместе с пакетом кладут на одну чашку весов и уравновешивают гирями, которые помещают на другую чашку, а затем зажим ослабляется. Воздух из бутыли перетекает в пакет, и равновесие весов нарушается. Груз какой массы и на какую чашку весов нужно положить, чтобы равновесие весов восстановилось? Плотность воздуха равна 1,3 кг/м^3, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Решение. Суммарная масса воздуха внутри бутыли и пакета после перетекания воздуха из бутыли в пакет не изменилась. Следовательно, суммарная сила тяжести, действующая на обе оболочки и воздух внутри них, осталась прежней. Однако изменился суммарный объём, который занимают вместе бутыль и пакет, так как после ослабления зажима часть воздуха из бутыли перешла в пакет. Давление в пакете стало равным 1 атм, значит, такое же давление установилось и в бутыли. Воздух, который в бутыли занимал объём 2 л при давлении 2 атм, теперь при давлении 1 атм занимает объём 4 л. Таким образом, в пакете оказалось 2 литра воздуха, и суммарный объём увеличился на 2 литра. На бутыль и пакет со стороны воздуха действует выталкивающая (Архимедова) сила. Приращение этой силы равно: $\Delta F_\text{А} = 0{,}002$ м$^3 \cdot (1{,}3$ кг/м$^3) \cdot (10$ м/с$^2) = 0{,}026$ Н.

Таким образом, для того, чтобы равновесие весов восстановилось, нужно на ту же чашку, где находится бутыль и пакет, добавить гирьки суммарной массой $M = \Delta F_\text{А}/g = 2{,}6$ г.

3. В калориметре находится $m = 100$ г расплавленного металла галлия при температуре его плавления $t_\text{пл} = 29{,}8$ °C. Его начали медленно охлаждать, оберегая от внешних воздействий, и в результате температура понизилась до $t = 19{,}8$ °C, а галлий остался жидким. Когда переохлаждённый таким образом жидкий галлий размешали палочкой, он частично перешёл в твердое состояние. Найдите массу отвердевшего галлия и установившуюся в калориметре температуру. Удельная теплота плавления галлия $\lambda = 80$ кДж/кг, удельная теплоёмкость жидкого галлия $c = 410$ Дж/(кг $\cdot$ °C). Теплоёмкостью калориметра и палочки пренебречь.

Решение. При отвердевании галлия выделяется теплота кристаллизации, что приводит к нагреванию системы до температуры плавления галлия $t_{пл} = 29{,}8$ °C, поскольку только при этой температуре жидкий и твёрдый галлий будут находиться в равновесии.

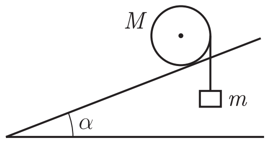
Количество теплоты, выделяющееся при отвердевании массы m_1 галлия, равно λm_1. Оно идёт на нагревание всего галлия до температуры плавления; для этого требуется количество теплоты $cm(t_{пл} - t)$. Следовательно, $m_1 = cm(t_{пл} - t)/\lambda \approx 5{,}1$ г.

Заметим, что если бы переохлаждение было очень сильным, то теплоты кристаллизации могло бы не хватить для нагревания всей массы галлия до температуры плавления. Однако, поскольку $m_1 < m$, то в нашем случае галлий действительно нагреется до этой температуры.

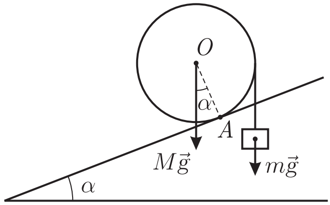
9 класс

На выполнение задания отводилось 4 астрономических часа.

1. Цилиндр массой M поместили на рельсы, наклоненные под углом α к горизонту (вид сбоку показан на рисунке). Груз какой минимальной массы m нужно прикрепить к намотанной на цилиндр нити, чтобы он покатился вверх? Проскальзывание отсутствует.



Решение. На цилиндр действуют приложенная к его центру сила тяжести Mg и приложенная к его краю сила натяжения нити, равная mg. Цилиндр покатится вверх, если момент силы тяжести относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка, будет меньше момента силы натяжения нити. Поскольку плечи сил тяжести и натяжения нити равны $R\sin\alpha$ и $R(1 - \sin\alpha)$, то искомое условие имеет вид: $MgR\sin\alpha < mgR(1 - \sin\alpha)$, или $m > (M\sin\alpha)/(1 - \sin\alpha)$.

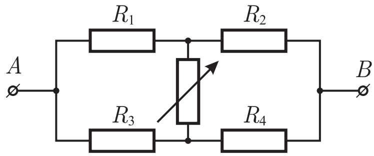


2. Алюминиевая проволока диаметром $d = 2{,}5$ мм, не слишком гнутая, покрыта льдом. Общий диаметр проволоки со льдом равен $D = 3{,}5$ мм. Температура льда и проволоки $t = 0$ °C. По проволоке пустили ток силой $I = 15$ А. За какое время лёд растает? Плотность льда $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3, а его удельная теплота плавления $\lambda = 340$ кДж/кг. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Решение. При прохождении тока через проволоку в ней выделяется тепло, равное по закону Джоуля-Ленца $Q = I^2R\tau$, где τ — искомое время таяния льда, а R — сопротивление проволоки. Это сопротивление, согласно известной формуле, равно $R = \rho l/S = 4\rho l/\pi d^2$ (здесь l — длина проволоки, S — площадь её поперечного сечения). Это количество теплоты расходуется на плавление льда: $Q = \lambda m$. Масса льда m равна произведению его плотности на объём: $m = \rho_л V = \rho_л(1/4)\pi(D^2 - d^2)l$.

Приравнивая полученные выражения для количеств теплоты, окончательно получаем: $\tau = \lambda\rho_л\pi^2 d^2(D^2 - d^2)/(16I^2\rho) \approx 19$ мин.

3. Электрическая цепь состоит из трёх резисторов с известными сопротивлениями $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_4 = 60$ Ом, одного резистора с неизвестным сопротивлением R_3 и одного переменного резистора (см. рис.) При измерении сопротивления R_{AB} между точками A и B этой электрической цепи выяснилось, что оно не зависит от сопротивления переменного резистора. Найдите величины сопротивлений неизвестного резистора R_3 и всей цепи R_{AB}.



Решение. Идея решения заключается в том, что при условиях задачи ток через переменный резистор не идёт, и напряжение на нём равно нулю (в противном случае изменение сопротивления этого резистора неизбежно приводило бы к изменению величины R_{AB}). Отсюда вытекает, что напряжения U_1 и U_3 на резисторах R_1 и R_3 совпадают. Так как

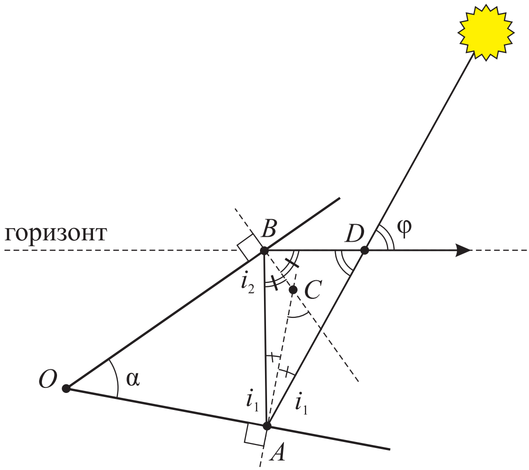
$$U_1 = U_{AB} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \qquad U_3 = U_{AB} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4},$$

то отсюда $R_1R_4 = R_2R_3$, и сопротивление неизвестного резистора $R_3 = R_1R_4/R_2 = 40$ Ом. Сопротивление всей цепи можно найти, пользуясь формулой для параллельного соединения резисторов:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}, \quad \text{откуда} \quad R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)R_4}{R_2 + R_4} \approx 33 \text{ Ом}.$$

4. В секстанте, который позволяет определять угол φ возвышения Солнца над горизонтом в полдень и, таким образом, широту местности, используются два плоских зеркала, от которых свет поочерёдно отражается и угол α между которыми регулируется. Изображение Солнца в этих зеркалах при измерениях с помощью секстанта необходимо совместить с линией горизонта, подбирая угол α. Найдите связь угла α с углом φ и объясните, почему использование секстанта сильно упрощает задачу нахождения угла φ, особенно при качке корабля.

Решение. Построим ход луча света от Солнца в секстанте при двух отражениях света от плоских зеркал, угол между которыми равен α (см. рис.). Обозначим вершину угла α точкой O, точки падения луча на первое и второе зеркала — A и B, точку пересечения перпендикуляров, восставленных к зеркалам в точках A и B — через C, точку пересечения входящего в прибор и выходящего из него лучей — через D. В момент снятия показаний при правильном положении зеркал прямая BD горизонтальна, а углы падения света на зеркала равны, соответственно, i_1 и i_2. В четырёхугольнике $AOBC$ два угла — OBC и OAC — прямые, поэтому угол BCA равен $(\pi - \alpha)$, а смежный с ним равняется α. Но этот же угол является внешним углом треугольника ABC, поэтому $\alpha = i_1 + i_2$. В свою очередь, угол φ возвышения Солнца над горизонтом равен углу BDA в треугольнике ABD, остальные углы которого равны, соответственно, $2i_1$ и $2i_2$. Поэтому $\varphi = \pi - 2(i_1 + i_2) = \pi - 2\alpha$.



Таким образом, $\alpha = (\pi - \varphi)/2$ и не зависит от угла падения света на зеркала. Поэтому даже при качке корабля и изменении угла i_1 луч света от Солнца, выходящий из секстанта, сохраняет своё направление (горизонтальное при правильном подборе угла α). При этом совместить изображение Солнца с горизонтом гораздо проще, чем визировать на угломерном инструменте сразу два направления — на Солнце и на горизонт, да ещё если всё качается!

10 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

1. Однажды летним утром кузнечик сидел на асфальте. Когда Солнце поднялось на угол φ над горизонтом, он прыгнул в сторону Солнца с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. С какой скоростью движется по асфальту тень кузнечика спустя время t после прыжка?

Решение. Направим ось X по горизонтали в сторону Солнца, ось Y — вертикально вверх, а начало координат поместим в точку, где сидел кузнечик. Закон движения кузнечика имеет вид:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t, \quad y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \quad \text{причём} \quad 0 < t < \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Координату тени кузнечика на асфальте $X(t)$ можно определить из условия $y(t)/(x(t) - X(t)) = \operatorname{tg}\varphi$. Отсюда

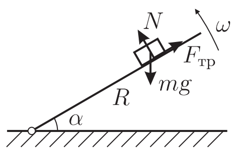
$$X(t) = x(t) - y(t)\operatorname{ctg}\varphi = v_0(\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{ctg}\varphi)t + \frac{gt^2}{2}\operatorname{ctg}\varphi.$$

Следовательно, движение тени кузнечика на асфальте является равноускоренным с ускорением $g\operatorname{ctg}\varphi$ и начальной скоростью $V_0 = v_0(\cos\alpha - \sin\alpha\operatorname{ctg}\varphi) = v_0 \sin(\varphi - \alpha)/\sin\varphi$. Следовательно, скорость тени в момент времени t равна

$$V(t) = v_0 \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi} + gt\operatorname{ctg}\varphi, \qquad 0 < t < \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

2. На шарнирно закреплённой доске на расстоянии R от шарнира находится маленькая шайба. Доску, первоначально расположенную горизонтально, начали вращать вокруг шарнира в вертикальной плоскости с угловой скоростью ω. При каком значении угла α наклона доски к горизонту шайба начнёт скользить по доске? Коэффициент трения шайбы о доску $\mu < 1$. Ускорение свободного падения равно g.

Решение. Ясно, что если резко начать вращать доску, опуская её свободный конец, то в момент начала вращения шайба сразу оторвётся от доски. Поэтому мы будем рассматривать случай, когда свободный конец доски поднимают.



При сообщении доске достаточно большой угловой скорости шайба сразу же начнёт скользить по доске. При не слишком большой угловой скорости шайба некоторое время будет неподвижна относительно доски, двигаясь при этом по окружности, а затем начнётся скольжение.

На шайбу действуют сила тяжести, сила реакции опоры N и сила трения покоя $F_{\text{тр}}$ (см. рисунок). Поскольку ускорение шайбы при движении по окружности равно $\omega^2 R$ и направлено к шарниру, имеем:

$$N = mg\cos\alpha, \qquad mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = m\omega^2 R.$$

Для шайбы, неподвижной относительно доски, должно выполняться условие $|F_{\text{тр}}| \leqslant \mu N$. Следовательно, шайба не будет скользить по доске при $|mg\sin\alpha - m\omega^2 R| \leqslant \mu mg\cos\alpha$.

Отсюда получаем, что при $\omega^2 R > \mu g$ шайба начнёт скользить по доске сразу же, при $\alpha = 0$.

Пусть теперь $\omega^2 R \leqslant \mu g$, и $\alpha \neq 0$. Определим, при каких условиях возможно скольжение шайбы к шарниру и от него.

1. Шайба будет скользить к шарниру, если начнёт выполняться условие $\sin\alpha - \mu\cos\alpha > \omega^2 R/g$. Введём обозначение: $\beta = \operatorname{arctg}\mu = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} = \arcsin\dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Тогда приведённое условие можно записать в виде:

$$\sin(\alpha - \beta) > \frac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2+1}}, \qquad \text{или} \qquad \alpha > \beta + \arcsin\frac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2+1}}.$$

Отметим, что ввиду того, что $\mu < 1$, имеем $\beta + \arcsin\dfrac{\omega^2 R}{g\sqrt{1+\mu^2}} < \dfrac{\pi}{2}$, поэтому, начиная с некоторой величины угла α, рассматриваемое условие будет выполняться.

2. Аналогично, шайба может начать скользить от шарнира, если $\sin\alpha - \mu\cos\alpha < \omega^2 R/g$.

Это условие можно записать в виде: $\alpha > \pi - \beta - \arcsin\dfrac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2+1}}$, однако при $0 < \alpha < \pi/2$ оно не выполняется.

Комбинируя полученные результаты, приходим к ответу: при $\omega^2 R > \mu g$ шайба начнёт скользить по доске при $\alpha = 0$; при $\omega^2 R \leqslant \mu g < g$ шайба начнёт скользить по доске к шарниру при $\alpha > \operatorname{arctg}\mu + \arcsin\dfrac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2+1}}$.

3. Два космических корабля с массами m_1 и m_2 летят с выключенными двигателями в поле тяготения звезды, масса которой M много больше их масс. Скорости кораблей на большом удалении от звезды были равны v_1 и v_2 соответственно. После пролёта кораблей около звезды и их удаления на большое расстояние от неё векторы их скоростей изменили своё направление на 90° и остались такими же по величине. Первый корабль пролетел от звезды на минимальном расстоянии l_1. На каком минимальном расстоянии от звезды l_2 пролетел второй корабль?

Решение. Прежде всего, заметим, что траектория движения материальной точки в поле тяжести звезды не зависит от массы материальной точки. Угол поворота корабля φ поэтому однозначно зависит от его минимального расстояния до звезды l, его скорости на бесконечности v и величины GM, входящей в закон всемирного тяготения (G — гравитационная постоянная). Эти величины имеют следующие размерности:

$$[GM] = \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2}, \qquad [l] = \text{м}, \qquad [v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Из них можно составить только одну независимую безразмерную комбинацию: $\dfrac{GM}{lv^2}$. Следовательно, угол поворота корабля φ является однозначной функцией от такой комбинации, и для обоих кораблей эти величины должны совпадать: $\dfrac{GM}{l_1 v_1^2} = \dfrac{GM}{l_2 v_2^2}$, откуда $l_2 = l_1 (v_1/v_2)^2$.

Данный ответ можно также подтвердить, используя соображения подобия. Действительно, уравнение движение для корабля, движущегося в поле тяжести звезды, имеет вид: $\vec{a} = -GM\vec{r}/r^3$. Если увеличить все расстояния в λ раз, а промежутки времени в $\lambda^{3/2}$ раза, то скорости изменятся в $\lambda^{-1/2}$ раза, а ускорение $\vec{a}$ и величина $GM\vec{r}/r^3$ — в λ^{-2} раз. Поэтому, если в какой-то момент времени радиус-векторы и скорости двух материальных точек, движущихся в поле тяготения звезды, связаны соотношениями $\vec{r}_1 = \lambda \vec{r}_2$, $\vec{v}_1 = \lambda^{-1/2} \vec{v}_2$, то эти соотношения будут справедливы во все моменты времени. Поэтому, если два корабля одновременно пролетают на минимальном расстоянии от звезды таким образом, что справедливы эти соотношения, то из них, исключая λ, получим написанный выше ответ для l_2.

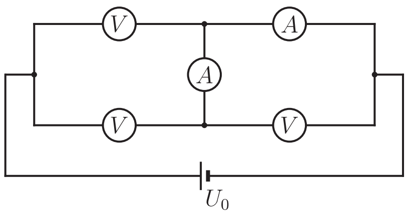
4. В цилиндре под поршнем находится при нормальных условиях порция гелия в количестве $\nu = 2$ моль. Ей сообщают количество теплоты $Q = 100$ Дж, при этом температура гелия увеличивается на $\Delta T = 10$ К. Оцените изменение объёма газа в этом процессе, считая его теплоёмкость постоянной.

Решение. Вначале определим, как меняется объём гелия в данном процессе. Если бы объём не менялся, а температура увеличилась на ΔT, то всё сообщаемое количество теплоты пошло бы на изменение внутренней энергии гелия: $\Delta U = (3/2)\nu R\,\Delta T \approx 250$ Дж. Поскольку $\Delta U > Q = 100$ Дж, то газом, согласно первому началу термодинамики, совершается работа $A = Q - \Delta U \approx -150$ Дж, то есть объём гелия должен уменьшаться. При этом температура гелия растёт, и давление должно возрастать быстрее, чем при изотермическом процессе.

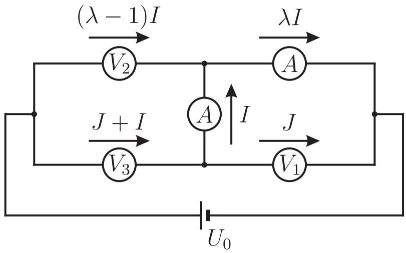
Поскольку $\Delta T = 10$ К $\ll T_0 = 273$ К, то будем считать, что величина изменения объёма $|\Delta V| \ll V_0 = 2 \cdot 22{,}4$ л, и изменение давления Δp также невелико по сравнению с начальным давлением $p_0 \approx 10^5$ Па. Тогда при грубой оценке можно положить $p \approx p_0$ и $A \approx p_0\,\Delta V$. Отсюда получаем, что $\Delta V \approx A/p_0 = (Q - (3/2)\nu R\,\Delta T)/p \approx -1{,}5$ л. Видно, что действительно $\Delta V \ll V_0 = 44{,}8$ л, поэтому приближение малого изменения объёма действительно оправдано.

На самом деле (см. выше) давление в процессе возрастает до $p_{\text{к}}{=}\nu R(T_0 + \Delta T)/(V_0 + \Delta V) = p_0(1 + (\Delta T/T_0))/(1 + \Delta(V/V_0)) \approx 1{,}07p_0$, и более точная оценка получится, если в выражение для работы A подставить не p_0, а среднее значение давления в процессе $p_{\text{ср}} = (p_0 + p_{\text{к}})/2$. Тогда уточнённое таким образом изменение объёма будет равно $\Delta V \approx -1{,}45$ л, что почти не отличается от предыдущей, более грубой оценки.

Замечание. В условии сказано, что теплоёмкость гелия в данном процессе можно считать постоянной. Это означает, что процесс является политропическим (так называются процессы, проходящие при постоянной теплоёмкости), однако исследование этих процессов выходит за рамки школьной программы. Точный расчёт, использующий теорию политропических процессов, даёт $\Delta V \approx -1{,}43$ л, так что даже наша грубая оценка совсем неплоха!



5. К идеальной батарейке с ЭДС $U_0 = 1{,}3$ В подключена мостовая электрическая цепь, собранная из трёх одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров, причём один из миллиамперметров включён в диагональ мостика. Известно, что показания миллиамперметров отличаются в 3 раза. Каким может быть отношение сопротивлений вольтметра и миллиамперметра? Считая, что сопротивление вольтметра больше сопротивления миллиамперметра, определите показания каждого из вольтметров.



Решение. Пусть I — ток через миллиамперметр, включённый в диагональ мостика, тогда λI — ток через другой миллиамперметр (см. рисунок). Возможные значения λ равны 3, 1/3, −3 и −1/3. Токи через вольтметры обозначим, согласно первому правилу Кирхгофа, как J, $(\lambda-1)I$ и $J+I$.

Обозначим через R_A и R_V сопротивления миллиамперметра и вольтметра и запишем второе правило Кирхгофа для двух соседних контуров, не содержащих ЭДС:

$$(J+I)R_V + IR_A = (\lambda-1)IR_V$$
$$JR_V = IR_A + \lambda IR_A$$

Подставляя JR_V из второго соотношения в первое, получаем:

$$(\lambda+2)IR_A = (\lambda-2)IR_V,$$

и

$$\frac{R_V}{R_A} = \frac{\lambda+2}{\lambda-2}.$$

При $\lambda = 1/3$ и $\lambda = -1/3$ отношение сопротивлений оказывается отрицательным, следовательно, эти случаи невозможны. В остальных случаях имеем: $\frac{R_V}{R_A} = 5$ при $\lambda = 3$ и $\frac{R_V}{R_A} = \frac{1}{5}$ при $\lambda = -3$.

Поскольку по условию сопротивление вольтметра больше сопротивления миллиамперметра, имеем: $\frac{R_V}{R_A} = 5$, $\lambda = 3$.

Отсюда находим токи, текущие через вольтметры V_1, V_2 и V_3:

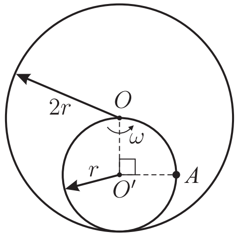
$$J = (\lambda+1)I\frac{R_A}{R_V} = \frac{4}{5}I;$$
$$(\lambda-1)I = 2I;$$
$$J+I = \frac{9}{5}I.$$

Следовательно, показания этих вольтметров V_1, V_2 и V_3 относятся, как числа $\frac{4}{5}$, 2 и $\frac{9}{5}$.

Поскольку $U_1 + U_3 = U_0 = 1{,}3$ В, получаем: $U_1 = 0{,}4$ В, $U_2 = 1$ В, $U_3 = 0{,}9$ В.

11 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.



1. По внутренней поверхности большого неподвижного обруча радиусом $2r$ без проскальзывания катится малый обруч радиусом r. Отрезок OO', соединяющий центры обручей, движется с угловой скоростью ω. К малому обручу в точке A прикреплён грузик. В некоторый момент времени обручи и грузик расположены так, как показано на рисунке. Чему равно в этот момент ускорение грузика?

Решение. Поместим начало координат в точку O и направим ось X вправо, а ось Y — вниз. Тогда точка O' — центр малого обруча — движется по закону

$$X(t) = r\sin\omega t, \qquad Y(t) = r\cos\omega t,$$

если отсчитывать время от момента, указанного в условии задачи.

Обозначим через $\varphi(t) = \varphi_0 - \omega_1 t$ угол поворота малого обруча, вращающегося при качении по большому обручу в противоположную сторону с угловой скоростью ω_1. Закон движения точки на малом обруче можно записать в виде

$$x(t) = r\sin\omega t + r\sin\varphi(t), \qquad y(t) = r\cos\omega t + r\cos\varphi(t),$$

а скорость и ускорение этой точки — в виде

$$\begin{aligned} v_x(t) &= r\omega\cos\omega t - r\omega_1\cos\varphi(t), & v_y(t) &= -r\omega\sin\omega t + r\omega_1\sin\varphi(t),\\ a_x(t) &= -\omega^2 r\sin\omega t - \omega_1^2 r\sin\varphi(t), & a_y(t) &= -\omega^2 r\cos\omega t - \omega_1^2 r\cos\varphi(t). \end{aligned}$$

В момент времени, когда $\varphi(t) = \omega t$, рассматриваемая точка на малом обруче касается большого обруча, поэтому её скорость должна обращаться в ноль. Отсюда получаем:

$$\omega_1 = \omega, \qquad \text{и} \qquad a_x = -\omega^2 x,\ a_y = -\omega^2 y.$$

Следовательно, в каждый момент времени ускорение точки A на малом обруче направлено к центру большого обруча и выражается через расстояние до центра большого обруча как $\omega^2 R$. В момент времени, показанный на рисунке в условии задачи, $R = r\sqrt{2}$. Таким образом, вектор ускорения точки A направлен к точке O под углом 45° к отрезку AO' и по величине равен $a = \omega^2 r\sqrt{2}$.

2. На закреплённой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, удерживают лёгкий лист бумаги. На него положили большой деревянный брусок. С каким ускорением начал двигаться брусок, когда брусок и бумагу отпустили? Коэффициент трения между бруском и бумагой μ_1, между бумагой и наклонной плоскостью μ_2.

Решение. На брусок массой M действуют сила тяжести Mg, сила реакции опоры $Mg\cos\alpha$ и сила трения $F_{\text{тр}1}$ со стороны листа. Ускорение бруска определяется из второго закона Ньютона:

$$Ma = Mg\sin\alpha - F_{\text{тр}1}.$$

На лист бумаги действуют силы реакции опоры со стороны бруска и наклонной плоскости, противоположные по направлению и равные по величине $Mg\cos\alpha$, и силы трения со стороны бруска $F_{\text{тр}1}$ и наклонной плоскости $F_{\text{тр}2}$, также противоположные по направлению и, поскольку лист лёгкий, равные по величине: $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = M(g\sin\alpha - a)$. При этом должны выполняться условия:

$$F_{\text{тр}1} \leqslant \mu_1 Mg\cos\alpha, \qquad F_{\text{тр}2} \leqslant \mu_2 Mg\cos\alpha.$$

Равенства в этих соотношениях достигаются только при скольжении поверхностей друг относительно друга.

Таким образом, возможны следующие случаи:

1. Система покоится, при этом $a = 0$. Случай возможен при $\mu_1 > \operatorname{tg}\alpha$ и $\mu_2 > \operatorname{tg}\alpha$.

2. Брусок движется, а лист бумаги покоится. В этом случае

$$F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = \mu_1 Mg\cos\alpha, \quad a = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha).$$

Случай возможен при $\mu_1 < \mu_2$ и $\mu_1 < \operatorname{tg}\alpha$.

3. Брусок движется вместе с бумагой. В этом случае

$$F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = \mu_2 Mg\cos\alpha, \quad a = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha).$$

Случай возможен при $\mu_1 > \mu_2$ и $\mu_2 < \operatorname{tg}\alpha$.

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} a = 0 \quad &\text{при} \quad \min(\mu_1, \mu_2) > \operatorname{tg}\alpha, \\ a = g(\sin\alpha - \min(\mu_1, \mu_2)\cos\alpha) \quad &\text{при} \quad \min(\mu_1, \mu_2) < \operatorname{tg}\alpha, \end{aligned}$$

3. Закреплённая непроводящая тонкостенная однородная сфера радиусом R и массой M равномерно заряжена по поверхности зарядом Q.

Из неё вырезают маленький кусочек массой $M/10000$, сжимают его в крошечный комочек (не меняя заряд) и помещают в центр сферы. Комочек отпускают. Чему будет равна его скорость на большом удалении от сферы? А в момент вылета из сферы? Сила тяжести отсутствует.

Решение. Сферу с вырезанным кусочком можно представить как совокупность целой сферы с зарядом Q (будем считать, что $Q > 0$) и маленького диска с зарядом противоположного знака, расположенного в месте нахождения вырезанного кусочка. Заряд этого диска равен $-q = -Q/10000$, а поверхностная плотность заряда на нём равна $\sigma = -Q/4\pi R^2$. Пока комочек движется внутри сферы, он притягивается к этому отрицательно заряженному диску, поскольку целая равномерно заряженная сфера не создаёт поля внутри. После вылета за пределы сферы комочек отталкивается от неё.

Скорость комочка на большом удалении от сферы и в момент вылета из неё можно найти из закона сохранения энергии. Можно считать, что потенциал в центре сферы, создаваемый всеми зарядами на её поверхности, равен $\varphi_0 = kQ/R$, где $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, поскольку потенциалом, который создаёт маленький отрицательно заряженный диск в центре сферы, можно пренебречь. В середине отверстия потенциал складывается из φ_0 — постоянного потенциала внутри равномерно заряженной сферы — и потенциала в центре отрицательно заряженного диска, который можно найти следующим образом.

Пусть диск имеет радиус r и поверхностную плотность заряда σ. Участок диска, ограниченный окружностями с радиусами r' и $r' + \Delta r'$, создаёт в центре диска потенциал $k\sigma \cdot 2\pi r'\,\Delta r'/r' = 2\pi k\sigma\,\Delta r'$. Следовательно, потенциал всего диска в его центре равен $\varphi_\text{д} = 2\pi k\sigma r = -2k\sqrt{q\pi|\sigma|}$, а потенциал в середине отверстия равен $\varphi_0 + \varphi_\text{д}$. На большом удалении от сферы её потенциал равен нулю: $\varphi_\infty = 0$.

Таким образом, энергия электростатического взаимодействия комочка со сферой изменится к моменту его вылета из сферы (достижения центра отверстия) на величину

$$\Delta W_\text{выл} = q\Delta\varphi = q((\varphi_0+\varphi_\text{д})-\varphi_0) = -2kq\sqrt{q\pi\frac{Q}{4\pi R^2}} = -k\frac{q\sqrt{qQ}}{R} = -\frac{kQ^2}{10^6 R},$$

а на большом удалении от сферы — на величину

$$\Delta W_\infty = q\Delta\varphi_\infty = q(\varphi_\infty - \varphi_0) = -q\varphi_0 = -\frac{kqQ}{R} = -\frac{kQ^2}{10^4 R}.$$

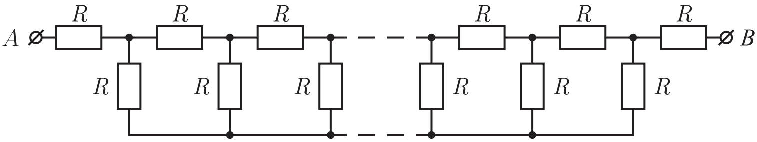
Скорости комочка в момент вылета из сферы $v_\text{выл}$ и на большом удалении от неё v_∞ выражаются через его массу $m = 10^{-4}M$ с помощью закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{\text{выл}}^2}{2} + \Delta W_{\text{выл}} = 0, \qquad \frac{mv_\infty^2}{2} + \Delta W_\infty = 0.$$

Отсюда

$$v_\infty = \sqrt{\frac{-2\Delta W_\infty}{m}} = \sqrt{\frac{2kQ^2}{MR}} = \frac{Q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 MR}},$$
$$v_{\text{выл}} = \sqrt{\frac{-2\Delta W_{\text{выл}}}{m}} = 10^{-1}\sqrt{\frac{2kQ^2}{MR}} = \frac{10^{-1}Q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 MR}}.$$

4. Найти сопротивление между клеммами A и B цепи, изображённой на рисунке и состоящей из бесконечного числа одинаковых резисторов с сопротивлением R.



Решение. Ясно, что на большом удалении от клемм A и B данной цепи ток течёт только по нижнему проводнику, а по верхней части цепи ток не идёт, и поэтому её можно разорвать. Тогда изображённую на рисунке в условии задачи электрическую цепь можно представить, как совокупность двух электрических цепей AC и CB, соединённых последовательно (см. рисунок 1).

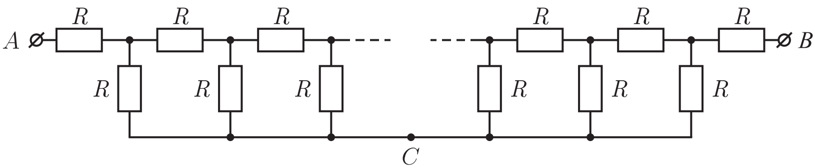


Рисунок 1.

Сопротивление всей электрической цепи R_{AB} складывается из сопротивлений R_{AC} и R_{CB} цепей AC и CB, которые совпадают: $R_{AC} = R_{CB} = R_x$. Поэтому $R_{AB} = 2R_x$.

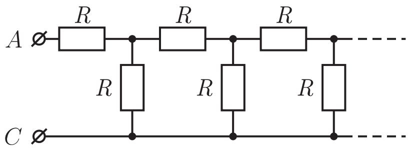


Рисунок 2.

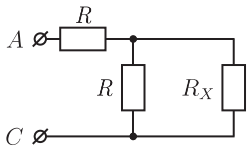


Рисунок 3.

Перерисуем электрическую цепь AC (см. рисунок 2). Поскольку эта цепь бесконечная и её сопротивление не изменяется при добавлении ещё одного звена в начале, представим её так, как показано на рисунке 3. Тогда из законов последовательного и параллельного соединения проводников получим:

$$R_x = R + \frac{RR_x}{R + R_x} \qquad \text{или} \qquad R_x^2 - RR_x - R^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим: $R_x = R(1+\sqrt{5})/2$. Отсюда $R_{AB} = 2R_x = R(1+\sqrt{5})$.

5. Для обоснования формулы, связывающей массу и энергию, А. Эйнштейн предложил следующий мысленный эксперимент. Два тела с массами m_1 и m_2 находятся на концах лёгкой неподвижной тележки длиной L, которая может свободно перемещаться по горизонтальной поверхности без трения. Одно из тел испускает фотон с частотой ω, который поглощается вторым телом. Чему будет равна скорость тележки после испускания фотона до его поглощения? А после поглощения фотона? На какое расстояние сместится тележка в рассматриваемом процессе? На какую величину Δm должна уменьшиться масса первого тела и увеличиться масса второго тела, чтобы центр масс системы после поглощения фотона остался на месте? Постоянная Планка равна $\hbar$, скорость света c.

Решение. Поскольку импульс фотона равен $p = \hbar\omega/c$, после его испускания именно на эту величину изменится суммарный импульс тележки и тел. Поэтому после испускания фотона скорость тележки будет равна $v_1 = p/(m_1+m_2) = (\hbar\omega/c)/(m_1+m_2)$.

Фотон достигнет второго тела за время $\Delta t = L/c$, и после его поглощения тележка остановится, то есть её скорость станет равной нулю: $v_2 = 0$.

За время Δt тележка сдвинется на расстояние

$$\Delta L = v_1 \Delta t = \frac{\hbar\omega/c}{m_1+m_2} \cdot \frac{L}{c} = \frac{\hbar\omega}{c^2} \cdot \frac{L}{m_1+m_2}.$$

Чтобы центр масс системы остался на месте, нужно, чтобы масса первого тела уменьшилась, а второго — увеличилась на величину Δm, определяемую из соотношения $\Delta m \cdot L - (m_1 + m_2) \cdot \Delta L = 0$. Отсюда $\Delta m = \hbar\omega/c^2$.

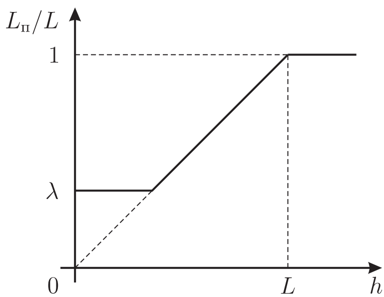
Городской этап. Второй теоретический тур

Состоялся 5 марта 2006 года.

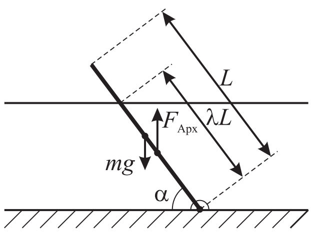
8 класс

На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

1. Ко дну сосуда при помощи шарнира прикреплена за конец тонкая однородная палочка длиной L. В сосуд медленно наливают воду и отмечают, какая часть длины палочки $L_п$ оказывается под водой. График зависимости относительной части длины палочки $L_п/L$, находящейся под водой, от высоты h уровня жидкости над дном сосуда изображён на рисунке. Определите плотность материала палочки, если известна плотность воды $\rho_в$.



Решение. Из графика понятно, что $L_п = h$ при $\lambda \leqslant L_п/L < 1$, и $L_п = L$ при $h \geqslant L$, то есть, начиная с $L_п/L = \lambda$, палочка стоит в воде вертикально — сначала частично, а затем полностью погруженной в воду. Это может иметь место, только если плотность материала палочки $\rho_п$ меньше, чем плотность воды $\rho_в$. В то же время $L_п/L = \lambda = \text{const}$ при $0 < h \leqslant \lambda L$, то есть в воду при этом погружена постоянная часть длины палочки, а угол α её наклона к горизонту по мере роста уровня воды в сосуде от 0 до λL растёт от 0 до 90°.



Рассмотрим условия равновесия палочки при неполном её погружении в воду в наклонном положении (см. рисунок). На палочку действуют: сила тяжести $mg = \rho_п gSL$ (здесь S — площадь сечения палочки), направленная вниз и приложенная к её середине, выталкивающая сила Архимеда $F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{в}} g S \cdot \lambda L$, направленная вверх и приложенная к середине погруженной в воду части палочки, и сила реакции шарнира, приложенная в точке прикрепления палочки к дну сосуда. В состоянии равновесия сумма моментов этих сил относительно точки крепления палочки в шарнире должна быть равна нулю. Поскольку момент силы реакции шарнира равен нулю, то должно выполняться равенство: $\rho_{\text{п}} g S L \cdot (L/2) \cos\alpha = \rho_{\text{в}} g S \cdot \lambda L \cdot (\lambda L/2) \cos\alpha$, откуда получаем, что $\rho_{\text{п}} = \rho_{\text{в}} \lambda^2$.

2. В калориметре находился лёд массой $m_{\text{л}} = 0{,}5$ кг при температуре $t_{\text{л}} = -20$ °C. Удельная теплоёмкость льда $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг · °C), а его удельная теплота плавления $\lambda = 340$ кДж/кг. В калориметр впустили пар массой $m_{\text{п}} = 60$ г при температуре $t_{\text{п}} = 100$ °C. Какая температура установится в калориметре? Удельная теплоёмкость воды $c_{\text{в}} = 4100$ Дж/(кг · °C), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг. Теплоёмкостью калориметра и потерями тепла пренебречь. Ответьте на тот же вопрос, если начальная масса льда равна $m_{\text{л}1} = 0{,}3$ кг.

Решение. Сначала нужно выяснить, что будет находиться в калориметре в конечном состоянии — только лёд, смесь льда и воды или только вода.

Сравниваем количества теплоты, которые входят в уравнение теплового баланса, в первом случае. Теплота, выделяющаяся при конденсации всего пара, равна

$$Q_1 = r \cdot m_{\text{п}} = 2{,}2 \cdot 10^6 \, \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 132 \text{ кДж}.$$

Теплота, необходимая для нагревания всего льда до точки плавления, то есть до 0 °C, равна

$$Q_2 = c_{\text{л}} m_{\text{л}} (0\ ^\circ\text{C} - t_{\text{л}}) = 2100 \, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot 0{,}5 \text{ кг} \cdot 20\ ^\circ\text{C} = 21 \text{ кДж}.$$

Теплота от конденсации всего пара больше, значит, лёд будет плавиться.

Общее количество теплоты, выделяющееся при конденсации пара и охлаждении образовавшейся из него воды до 0 °C, составляет

$$Q_3 = Q_1 + c_{\text{в}} m_{\text{п}} (t_{\text{п}} - 0\ ^\circ\text{C}) =$$
$$= 1{,}32 \cdot 10^5 \text{ Дж} + 4100 \, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 100\ ^\circ\text{C} = 156{,}6 \text{ кДж},$$

что меньше теплоты, нужной для того, чтобы весь лёд, взятый при начальной температуре, расплавился:

$$Q_4 = Q_2 + \lambda m_{\text{л}} = 21 \cdot 10^3 \text{ Дж} + 340 \cdot 10^3 \, \frac{\text{кДж}}{\text{кг}} \cdot 0{,}5 \text{ кг} = 191 \text{ кДж}.$$

Значит, растает только часть льда, и конечная температура смеси будет 0 °C.

Во втором случае в конечном состоянии в калориметре, очевидно, будет только вода. Рассчитаем Q'_4 для этого случая:

$$Q'_4 = Q'_2 + \lambda m_{\text{л}1} =$$
$$= 2100 \, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot 0{,}3 \text{ кг} \cdot 20 \text{ }^\circ\text{C} + 340 \cdot 10^3 \, \frac{\text{кДж}}{\text{кг}} \cdot 0{,}3 \text{ кг} = 114{,}6 \text{ кДж}.$$

Эта величина меньше общего количества теплоты Q_3, выделяющегося при конденсации пара и охлаждении образовавшейся из него воды до 0 °C. Поэтому для расчёта температуры, которая установится в калориметре в этом случае, надо записать уравнение теплового баланса:

$$Q'_4 + c_{\text{в}} m_{\text{л}1}(t - 0 \text{ }^\circ\text{C}) = Q_1 + c_{\text{в}} m_{\text{п}}(t_{\text{п}} - t),$$

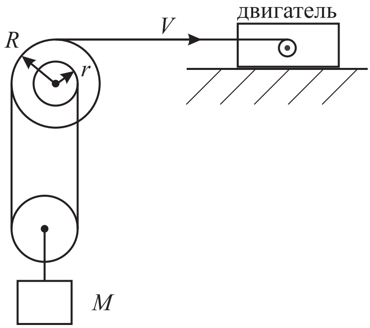
или

$$c_{\text{в}}(m_{\text{л}1} + m_{\text{п}})t = Q_1 - Q'_4 + c_{\text{в}} m_{\text{п}} t_{\text{п}}.$$

Выражая отсюда температуру t, окончательно получаем:

$$t = \frac{r m_{\text{п}} - \lambda m_{\text{л}1} + c_{\text{л}} m_{\text{л}1} t_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{п}} t_{\text{п}}}{c_{\text{в}}(m_{\text{л}1} + m_{\text{п}})} \approx 28 \text{ }^\circ\text{C}.$$

3. Груз массой M прикреплён к подвижному блоку, подвешенному на нити, один из концов которой намотан на шкив радиусом r, а другой конец перекинут через соосный, скреплённый с первым шкив радиусом R и наматывается на вал, приводимый во вращение при помощи двигателя (см. рисунок). Скорость горизонтального участка нити равна V. Найдите мощность, которая развивается двигателем при поднятии груза, считая, что нить не проскальзывает по шкивам.



Решение. При движении с постоянной скоростью мощность силы можно рассчитать по формуле $N = F \cdot v$, где F — сила, с которой тянут груз, а v — скорость поднятия груза. Скорость v найдём из уравнения кинематической связи. Направим ось OX вверх, начало отсчёта выберем на уровне начального положения груза. Обозначим скорость вращения крайних точек малого шкива через V'. Поскольку скорость вращения крайних точек большого шкива равна скорости горизонтального участка нити V, то изменение координаты груза Δx за время Δt можно выразить из уравнения

$$2\Delta x = V\Delta t - V'\Delta t,$$

где первое слагаемое в правой части уравнения равно длине нити, наматывающейся через большой шкив на вал двигателя за время Δt, а второе слагаемое — длине нити, разматывающейся с малого шкива за то же время Δt. Учитывая, что угловые скорости обоих шкивов одинаковы, можно записать: $V'/r = V/R$. Выразим отсюда V', подставим это выражение в предыдущее уравнение и разделим его на Δt. В результате получаем:

$$\frac{2\Delta x}{\Delta t} = V - \frac{V}{R}r = V\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

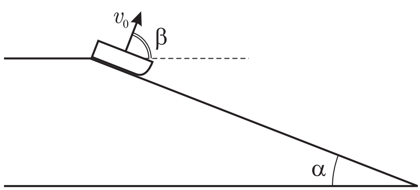
Отсюда находим скорость v поднятия груза: $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}V\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$.

Поскольку груз поднимается равномерно, то сумма действующих на него сил равна нулю: $F = Mg$. Таким образом, получаем окончательное выражение для мощности, развиваемой двигателем при поднятии груза: $N = \dfrac{1}{2}MgV\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$.

9 класс

На выполнение задания отводилось 4 астрономических часа.

1. Находясь на вершине ледяной горки, образующей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, школьник бросил снежок под углом $\beta = 70^\circ$ к горизонту и в этот же момент начал спускаться без начальной скорости с этой горки на санках. Через некоторое время снежок попал в школьника. Найдите коэффициент трения между полозьями санок и льдом.



Решение. Введём систему координат следующим образом: направим ось OX вниз вдоль горки, ось OY — перпендикулярно горке вверх. При данном выборе координатных осей проекции на них ускорения свободного падения равны

$$g_x = g\sin\alpha, \qquad g_y = -g\cos\alpha.$$

Санки движутся с ускорением a, определяемым из второго закона Ньютона:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$$

где $\mu < \operatorname{tg}\alpha$ — коэффициент трения.

Обозначим через $v_{0x} = v_0\cos(\alpha+\beta)$ и $v_{0y} = v_0\sin(\alpha+\beta)$ проекции начальной скорости снежка на координатные оси. Законы движения снежка (1) и санок (2) имеют вид

$$x_1 = v_{0x}t + \frac{g\sin\alpha\cdot t^2}{2}, \qquad y_1 = v_{0y}t - \frac{g\cos\alpha\cdot t^2}{2}, \qquad (1)$$

$$x_2 = \frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2}{2}, \qquad y_2 = 0 \qquad (2)$$

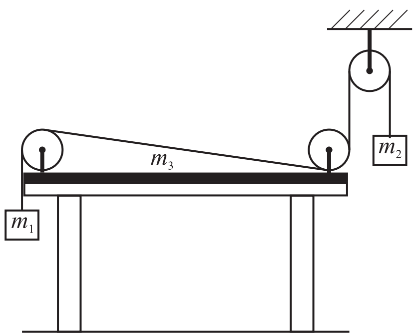
Снежок попадёт в мальчика, если в некоторый момент времени $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Отсюда получаем соотношения:

$$0 = v_{0x}t + \frac{\mu g\cos\alpha\cdot t^2}{2} \qquad \text{и} \qquad 0 = v_{0y}t + \frac{g\cos\alpha\cdot t^2}{2}.$$

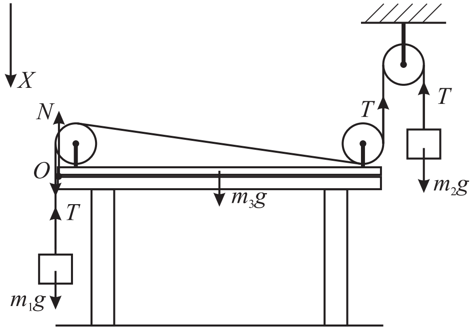
Следовательно, $v_{0x}/v_{0y} = -\mu$, и $\mu = -\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) \approx 0{,}17$.

Для приведённых в условии числовых данных соотношение $\mu < \operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}58$ действительно выполнено.

2. В системе, изображённой на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения нет. Массы грузов на концах нити равны m_1 и m_2, однородная доска массой m_3 лежит на горизонтальном столе так, что вертикальные участки нити, переброшенной через закреплённые на доске блоки, проходят вдоль её торцов. При каком условии доска при движении грузов будет оставаться в горизонтальном положении?



Решение. Обозначим длину доски через l, а силу натяжения, одинаковую вдоль всей нити, через T (см. рисунок). Ясно, что доска может подняться под действием силы T, приложенной к её правому концу, в то время как левый её конец — точка O — прижимается к столу такой же по величине силой T, а со стороны стола в этой точке на доску действует сила реакции опоры N. Таким образом, доска останется в горизонтальном положении, если момент силы тяжести относительно точки O будет больше, чем момент силы T, то есть $m_3g(l/2) \geqslant Tl$, или $T \leqslant (m_3/2)g$.



При этом горизонтальная сумма сил, действующих на доску, равна нулю, так что при движении грузов она останется неподвижной.

Уравнения движения грузов в проекции на вертикальную ось X имеют вид:

$$m_1a_1 = m_1g - T, \qquad m_2a_2 = m_2g - T.$$

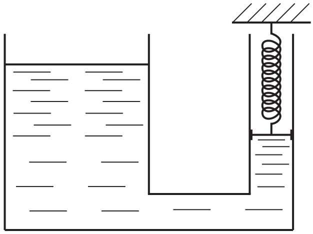
Из условия нерастяжимости нити получаем, что $a_1 = -a_2$. Отсюда

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1}, \quad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \quad T = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) 2g.$$

Таким образом, $T = (2m_1m_2/(m_1 + m_2))g$, и искомое условие горизонтальности доски имеет вид:

$$\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g \leqslant \frac{m_3}{2}g, \quad \text{или} \quad m_3 \geqslant \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

3. В два сообщающихся цилиндра налита вода. Один из цилиндров с площадью поперечного сечения S_1 открыт, а другой закрыт сверху поршнем, к которому прикреплена пружина (см. рис.) Система находится в равновесии. Если точку подвеса пружины сместить вниз на расстояние a, то свободная поверхность воды в первом цилиндре поднимется на



расстояние $\alpha_1 a$, а поршень опустится на расстояние $\alpha_2 a$ (α_1 и α_2 — положительные коэффициенты). Чему равна площадь поперечного сечения S_2 закрытого цилиндра? На какое расстояние b_2 сместился бы поршень, если бы в открытый цилиндр долили объём V воды, не смещая точку подвеса пружины? Чему равна жёсткость пружины k? Ускорение свободного падения равно g, плотность воды равна ρ.

Решение. Из условия задачи вытекает, что объём воды в левом цилиндре увеличился на $S_1\alpha_1 a$, на такую же величину должен уменьшиться объём и в правом цилиндре; отсюда

$$S_1\alpha_1 a = S_2\alpha_2 a, \qquad \text{и} \qquad S_2 = \frac{S_1\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Добавление воды в левый цилиндр можно провести в два этапа. Сначала дольём в левый цилиндр объём V воды и поднимем точку подвеса пружины на расстояние $V/(S_1 + S_2)$. Тогда равновесие в системе не нарушится, и поршень также поднимется на такое же расстояние. После этого вернём точку подвеса в прежнее положение, опустив её на расстояние $V/(S_1 + S_2)$. Тогда поршень опустится на расстояние $\alpha_2 V/(S_1 + S_2)$. Общее смещение поршня равно

$$b_2 = \frac{V(1-\alpha_2)}{S_1 + S_2} = \frac{V}{S_1}\cdot\frac{\alpha_2(1-\alpha_2)}{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Найдём жёсткость пружины k. Вернём поршень в первоначальное (до наливания воды) положение, сместив его вниз на расстояние b_2, а точку подвеса — вниз на расстояние

$$\frac{b_2}{\alpha_2} = \frac{V}{S_1}\cdot\frac{1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}.$$

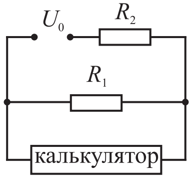
Тогда пружина сожмётся по сравнению с начальной длиной на величину $\dfrac{V}{S_1}\cdot\dfrac{1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$, а в левом цилиндре уровень воды будет выше на величину V/S_1. Запишем условие равенства давлений:

$$\frac{k}{S_2}\cdot\frac{V}{S_1}\cdot\frac{1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} = \rho g\frac{V}{S_1}.$$

Отсюда

$$k = \rho g S_2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_2} = \rho g S_1\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_2}.$$

4. В технической документации на калькулятор школьник прочитал: «Для нормальной работы калькулятора подаваемое на него напряжение должно быть в пределах от $U_{\min} = 4{,}5$ В до $U_{\max} = 5{,}5$ В; в зависимости от режима работы калькулятор потребляет ток от $I_{\min} = 20$ мА до $I_{\max} = 50$ мА». Не найдя батарейку с нужным напряжением, школьник решил включить данный калькулятор, используя имеющийся в школьной лаборатории аккумулятор с напряжением $U_0 = 12$ В и малым внутренним сопротивлением и резисторы, включённые в электрическую цепь, схема которой изображена на рисунке. Сопротивление резистора $R_2 = 40$ Ом. В каком интервале должно лежать сопротивление резистора R_1, чтобы включённый таким образом калькулятор нормально функционировал?



Решение. Из текста технической документации следует, что сопротивление R калькулятора зависит от режима его работы и может колебаться в пределах

$$R_{\min} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} \leqslant R \leqslant R_{\max} = \frac{U_{\max}}{I_{\min}}.$$

В соответствии с формулами для последовательного и параллельного соединения проводников, напряжение на калькуляторе выражается через сопротивления R_1 и R_2 следующим образом:

$$U = \frac{U_0}{R_2 + \dfrac{R_1 R}{R_1 + R}} \cdot \frac{R_1 R}{R_1 + R} = \frac{U_0}{1 + \dfrac{R_2}{R_1} + \dfrac{R_2}{R}}.$$

При увеличении сопротивления R напряжение на калькуляторе U возрастает; следовательно, калькулятор будет нормально функционировать при соблюдении следующих неравенств:

$$\frac{U_0}{1 + \dfrac{R_2}{R_1} + \dfrac{R_2}{R_{\min}}} \geqslant U_{\min} \qquad \text{и} \qquad \frac{U_0}{1 + \dfrac{R_2}{R_1} + \dfrac{R_2}{R_{\max}}} \leqslant U_{\max}$$

Эти неравенства можно переписать в виде:

$$\frac{U_0}{U_{\max}} - 1 - \frac{R_2}{R_{\max}} \leqslant \frac{R_2}{R_1} \leqslant \frac{U_0}{U_{\min}} - 1 - \frac{R_2}{R_{\min}}.$$

Для числовых данных, указанных в условии задачи, оба предела в данном неравенстве положительны; следовательно, сопротивление резистора R_1 должно лежать в следующем интервале:

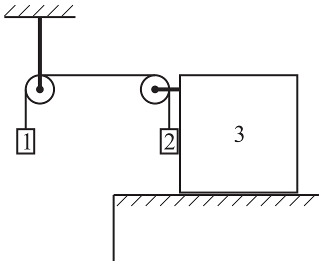
$$\frac{U_{\min}R_2}{U_0 - U_{\min} - I_{\max}R_2} \leqslant R_1 \leqslant \frac{U_{\max}R_2}{U_0 - U_{\max} - I_{\min}R_2}.$$

Подставляя в эти неравенства числовые значения, получаем: 32,7 Ом $\leqslant R_1 \leqslant$ 38,6 Ом.

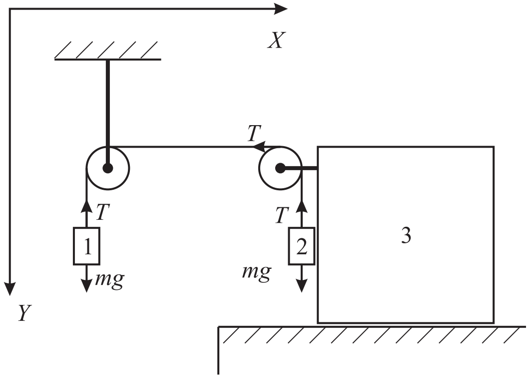
10 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

1. В системе, изображённой на рисунке, массы всех трёх грузов одинаковы и равны m. Нить, соединяющая грузы 1 и 2, невесома и нерастяжима; её участки, не лежащие на блоках, вертикальны или горизонтальны; блоки невесомы, трения нет. Груз 3 движется по горизонтальной плоскости, не опрокидываясь. Найдите ускорения всех трёх грузов. Ускорение свободного падения равно g.



Решение. При условиях задачи сила натяжения нити везде одинакова и равна T. Груз 1 будет двигаться по вертикали с ускорением a_1, груз 3 — по горизонтали с ускорением a_3, груз 2 — по вертикали с ускорением a_{2y} и вместе с грузом 3 по горизонтали с ускорением $a_{2x} = a_3$.



Введём систему координат, как показано на рисунке, и запишем уравнения движения грузов в проекциях на оси X и Y:

$$ma_1 = mg - T \qquad \text{(груз 1);}$$
$$ma_{2y} = mg - T \qquad \text{(груз 2);}$$
$$2ma_{2x} = -T \qquad \text{(грузы 2 и 3).}$$

При написании последнего уравнения мы учли, что силы давления грузов 2 и 3 друг на друга — внутренние для системы этих грузов, так что они движутся только под действием силы натяжения нити T.

Из условия нерастяжимости нити $y_1 + y_2 + x_2 = \mathrm{const}$ следует уравнение кинематической связи $a_1 + a_{2y} + a_{2x} = 0$.

Из двух первых уравнений полученной системы следует, что $a_1 = a_{2y} = g - (T/m)$, а из третьего — что $a_{2x} = -T/2m$. Подставляя эти выражения в уравнение кинематической связи, получаем:

$$g - \frac{T}{m} + g - \frac{T}{m} - \frac{T}{2m} = 0, \qquad \text{или} \qquad T = \frac{4}{5}mg.$$

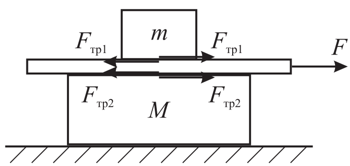
Следовательно, $a_1 = a_{2y} = g/5$ и $a_{2x} = a_3 = -2g/5$. Отсюда находим величину ускорения второго груза: $a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = g/\sqrt{5}$. Вектор ускорения второго груза направлен вниз под углом $\varphi = \mathrm{arctg}\,|a_{2y}/a_{2x}| = \mathrm{arctg}(1/2)$ к горизонту.

2. На гладком горизонтальном столе находится тележка массой $M = 3$ кг. На её поверхность положили лист бумаги массой $m_0 = 5$ г, а на него — груз массой $m = 1$ кг. Коэффициент трения между бумагой и каждым из тел равен $\mu = 0{,}7$. Лист бумаги начинают тянуть в горизонтальном направлении с силой F. Считая, что $g = 10$ м/с^2, определите значения F, при которых:

а) груз будет неподвижен относительно листа;

б) тележка будет неподвижна относительно листа.

Найдите ускорение листа для случаев $F = 3$ Н и $F = 10$ Н.



Решение. Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел по вертикали. На груз действуют сила тяжести mg и сила реакции опоры со стороны бумаги, также равная по величине mg. На лист бумаги действуют силы реакции со стороны груза и тележки, а действующей на него силой тяжести можно пренебречь, т. к. $m_0 \ll m < M$.

На тележку действует сила давления со стороны листа, равная mg, и такая же по величине сила со стороны стола.

Следовательно, как сила трения $F_{\text{тр}1}$ между листом и грузом, так и сила трения $F_{\text{тр}2}$ между листом и тележкой не могут превосходить μmg. При этом каждая из сил трения равна μmg только при скольжении поверхностей.

Запишем уравнения движения, из которых можно найти ускорения груза a_1, листа a_0 и тележки a_2, в проекциях на горизонтальную ось, направленную вдоль силы F:

$$ma_1 = F_{\text{тр}1}; \qquad m_0 a_0 = F - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2}; \qquad Ma_2 = F_{\text{тр}2}.$$

Рассмотрим четыре возможных случая.

1. Лист скользит относительно груза и тележки. В этом случае силы трения максимальны; данный случай возможен только при $F > 2\mu mg$.

2. Лист скользит вместе с грузом относительно тележки. В этом случае имеем:

$$F_{\text{тр}2} = \mu mg, \quad F_{\text{тр}1} \approx F - F_{\text{тр}2} \approx F - \mu mg, \quad a_2 = \frac{\mu mg}{M}, \quad a_1 = \frac{F}{m} - \mu g.$$

Данный случай возможен при $F_{\text{тр}1} < \mu mg$ и $a_1 > a_2$, или при $\mu mg(1 + (m/M)) < F < 2\mu mg$.

3. Лист скользит вместе с тележкой относительно груза. В этом случае $F_{\text{тр}1} = \mu mg$, поэтому ввиду того, что $M > m$, должно быть $a_2 < a_1$. Поэтому при числовых данных, приведённых в условии, данный случай невозможен.

4. Лист движется вместе с тележкой и грузом с ускорением $a_0 = a_1 = a_2 = F/(M + m)$. При этом

$$F_{\text{тр}1} = \frac{m}{M+m}F, \qquad F_{\text{тр}2} = \frac{M}{M+m}F.$$

Данный случай возможен при $F_{\text{тр}2} < \mu mg$, то есть при $F < \mu mg(1 + (m/M))$.

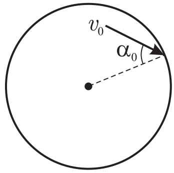
В итоге получаем следующий ответ.

(а) Груз будет неподвижен относительно листа при $\mu mg(1 + (m/M)) < F < 2\mu mg$, то есть при 9,33 Н $< F <$ 14 Н.

(б) Тележка будет неподвижна относительно листа при $F < \mu mg(1 + (m/M)) = 9{,}33$ Н.

При $F = 3$ Н реализуется случай 4, и ускорение листа $a_0 = a_1 = a_2 = 0{,}75$ м/с^2; при $F = 10$ Н реализуется случай 2, и ускорение листа $a_0 = a_1 = (F/m) - \mu g = 3$ м/с^2.

3. В невесомости внутри сферы радиусом R_0 движется шарик, упруго соударяясь со стенками сферы. Скорость шарика v_0, угол падения шарика на сферу, то есть угол между вектором его скорости и нормалью к сфере непосредственно перед соударениями, равен α_0 (см. рис.). Сферу начали медленно равномерно сжимать до радиуса R_1. С какой скоростью v_1 будет двигаться шарик в конце процесса сжатия? Чему при этом будет равен угол α_1 падения шарика на сферу?



Решение. Пусть в момент времени, когда радиус сферы равен R, шарик движется со скоростью v, падая на поверхность под углом α к нормали, а сфера сжимается со скоростью $u \ll v$. После соударения составляющая скорости шарика, параллельная стенке, остаётся неизменной, а нормальная составляющая изменяется на величину $2u$. Следовательно, изменение кинетической энергии шарика

$$\Delta W = \frac{m}{2}\left((v\cos\alpha + 2u)^2 - (v\cos\alpha)^2\right) \approx 2mvu\cos\alpha$$

(слагаемым, пропорциональным u^2, можно пренебречь ввиду его малости), а изменение величины скорости шарика равно

$$\Delta v = \frac{\Delta W}{mv} = 2u\cos\alpha.$$

За промежуток времени между соударениями $\Delta t = (2R\cos\alpha)/v$ радиус сферы изменяется на величину $\Delta R = -u\Delta t = -(2Ru\cos\alpha)/v$. Следовательно, $\Delta v/\Delta R = -v/R$, и $\Delta(vR) = 0$, то есть $vR = \text{const}$. Отсюда $v_1 R_1 = v_0 R_0$.

Во время каждого столкновении сохраняется величина $v\sin\alpha = \text{const}$, при этом угол α уменьшается таким образом, что $\Delta v \cdot \sin\alpha + v \cdot \Delta\sin\alpha = 0$ и $\Delta\sin\alpha = -\dfrac{\Delta v}{v}\sin\alpha$. Однако за время движения шарика между столкновениями радиус сферы уменьшается, поэтому по теореме синусов $\sin\alpha$ увеличивается обратно пропорционально R. Поэтому на стадии движения шарика между столкновениями $\Delta\sin\alpha = -\dfrac{\Delta R}{R}\sin\alpha$ Следовательно, суммарное изменение угла α во время столкновения и за время пролёта между столкновениями равно нулю.

Таким образом, мы приходим к ответу:

$$v_1 = v_0\frac{R_0}{R_1}, \qquad \alpha_1 = \alpha_0.$$

4. Идеальный одноатомный газ (количество вещества ν) участвует в циклическом процессе, состоящем из двух изотерм и двух изохор. При изохорическом нагревании газ получает количество теплоты Q_1, а при изотермическом расширении — количество теплоты Q_2. Минимальная температура газа в данном циклическом процессе равна $T_{\min}$. Найдите:

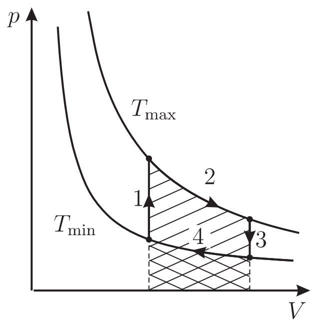
а) максимальную температуру газа;

б) количества теплоты, отданные газом при изохорическом охлаждении и изотермическом сжатии;

в) работу, совершённую газом на каждой из стадий процесса;

г) КПД теплового двигателя, работающего по рассматриваемому циклу.

Решение. Количество теплоты Q_1, сообщаемое газу при изохорическом нагревании от температуры $T_{\min}$, которую газ имел на нижней изотерме (см. рисунок), до максимальной температуры $T_{\max}$ на верхней изотерме, идёт на изменение его внутренней энергии: $Q_1 = (3/2)\nu R(T_{\max} - T_{\min})$.



Следовательно, $T_{\max} = T_{\min} + \dfrac{Q_1}{(3/2)\nu R}$.

Заметим, что величины работ A_2 и A_4, совершаемых газом на изотермических стадиях, относятся, как площади криволинейных трапеций (см. рисунок) под гиперболами, описываемыми следующими уравнениями: $p = \nu RT_{\max}/V$ (верхняя изотерма) и $p = \nu RT_{\min}/V$ (нижняя изотерма). Поскольку при изменении объёма на малую величину ΔV газ совершает работу $\Delta A = (\nu R\Delta V/V)T$, то величина работы, совершённой в изотермическом процессе, пропорциональна температуре T, которую имеет газ в этом процессе. Поэтому $A_2/|A_4| = T_{\max}/T_{\min}$.

Таким образом, можно найти работы, совершаемые газом на каждой из стадий данного циклического процесса.

1) Изохорическое нагревание: $A_1 = 0$.

2) Изотермическое расширение: $A_2 = Q_2$, так как внутренняя энергия газа не изменяется.

3) Изохорическое охлаждение: $A_3 = 0$.

4) Изотермическое сжатие:

$$A_4 = -A_2\frac{T_{\min}}{T_{\max}} = -Q_2\frac{(3/2)\nu RT_{\min}}{(3/2)\nu RT_{\min} + Q_1}.$$

При изохорическом охлаждении (стадия 3) газ отдаёт количество теплоты $|Q_3| = (3/2)\nu R(T_{\max} - T_{\min}) = Q_1$, а при изотермическом сжатии (стадия 4) — количество теплоты

$$|Q_4| = |A_4| = Q_2 \frac{(3/2)\nu R T_{\min}}{(3/2)\nu R T_{\min} + Q_1}.$$

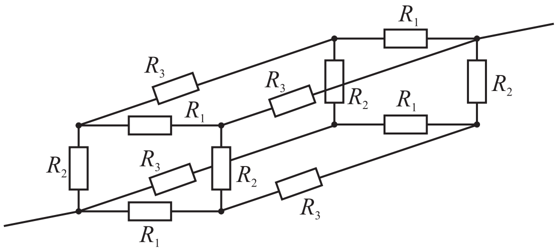
КПД η теплового двигателя, работающего по рассматриваемому циклу, равен отношению совершённой работы

$$A = A_2 + A_4 = A_2 \left(1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\right) = Q_2 \left(1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\right).$$

к полученному количеству теплоты $Q_1 + Q_2$. Следовательно,

$$\eta = \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2)\left(\dfrac{3}{2}\nu R T_{\min} + Q_1\right)}.$$

5. Двенадцать резисторов спаяны в виде прямоугольного параллелепипеда таким образом, что сопротивления каждых четырёх параллельных рёбер одинаковы и равны, соответственно, R_1, R_2 и R_3 (см. рисунок). Найдите сопротивление этой электрической цепи между точками, лежащими на пространственной диагонали параллелепипеда.



Решение. Обозначим через I_1, I_2, I_3, I_1', I_2' и I_3' токи через соответствующие резисторы, через I — полный ток в цепи. Запишем закон сохранения электрического заряда для каждой из трёх граней, примыкающих к вершине A, в которую втекает ток. Например, в грань $ABB'A'$ втекает ток I и вытекают 4 тока: 2 тока I_1 из вершин A и B' и 2 тока I_1' из вершин A' и B. Таким образом, получаем:

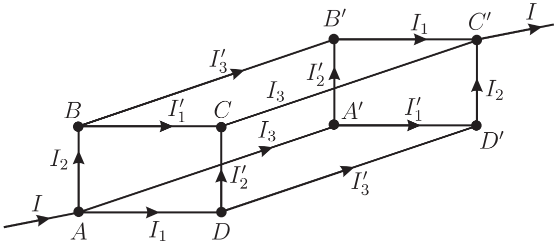
$$I = 2I_1 + 2I_1' \qquad \text{(грань } ABB'A'\text{);}$$

$$I = 2I_2 + 2I_2' \qquad \text{(грань } ADD'A'\text{);}$$

$$I = 2I_3 + 2I_3' \qquad \text{(грань } ABCD\text{).}$$

Поэтому удобно переобозначить токи:

$$I_1 = \frac{I}{4} + J_1, \qquad I_1' = \frac{I}{4} - J_1;$$
$$I_2 = \frac{I}{4} + J_2, \qquad I_2' = \frac{I}{4} - J_2;$$
$$I_3 = \frac{I}{4} + J_3, \qquad I_3' = \frac{I}{4} - J_3.$$



Запишем для каждого из контуров $ABB'A'$, $ADD'A'$ и $ABCD$ второе правило Кирхгофа. Для контура $ABCD$ имеем:

$$\left(\frac{I}{4} + J_1\right) R_1 + \left(\frac{I}{4} - J_2\right) R_2 = \left(\frac{I}{4} - J_1\right) R_1 + \left(\frac{I}{4} + J_2\right) R_2,$$

откуда $J_1R_1 = J_2R_2$. Рассматривая аналогично другие контуры, получаем: $J_1R_1 = J_2R_2 = J_3R_3 = U_0$.

Следовательно, все токи выражаются через один неизвестный параметр U_0:

$$I_1 = \frac{I}{4} + \frac{U_0}{R_1}, \qquad I_1' = \frac{I}{4} - \frac{U_0}{R_1};$$
$$I_2 = \frac{I}{4} + \frac{U_0}{R_2}, \qquad I_2' = \frac{I}{4} - \frac{U_0}{R_2};$$
$$I_3 = \frac{I}{4} + \frac{U_0}{R_3}, \qquad I_3' = \frac{I}{4} - \frac{U_0}{R_3}.$$

Параметр U_0 можно определить из закона сохранения электрического заряда в точке A:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I, \qquad \text{откуда} \qquad U_0\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{I}{4}.$$

Следовательно, напряжение между точками A и C' электрической цепи выражается через ток следующим образом:

$$U = U_{AC'} = I_1R_1 + I_2R_2 + I_3'R_3 = \frac{I}{4}(R_1 + R_2 + R_3) + U_0 =$$
$$= \frac{I}{4}\left(R_1 + R_2 + R_3 + \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}\right),$$

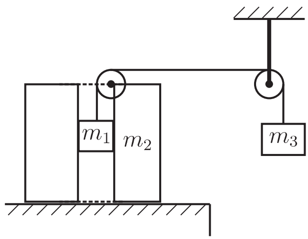
а искомое сопротивление электрической цепи равно

$$R = \frac{1}{4}\left(R_1 + R_2 + R_3 + \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}\right).$$

11 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

1. В системе, изображённой на рисунке, цилиндрический груз массой m_1 движется внутри цилиндрического канала чуть большего диаметра, просверленного внутри тела массой m_2. Нить, соединяющая грузы m_1 и m_3, невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения нет. Чему равно ускорение груза массой m_1? Ускорение свободного падения равно g, участок нити между блоками горизонтален.



Решение. Введём систему координат, как показано на рисунке.

Пусть T — сила натяжения нити, a_{1x} и a_{1y} — проекции ускорения первого груза на координатные оси, $a_2 = a_{1x}$ — ускорение второго груза, a_3 — ускорение третьего груза. Запишем уравнения движения грузов и уравнения кинематической связи в проекциях на координатные оси.

$m_3a_3 = T - m_3g$ (уравнение движения третьего груза)

$(m_1 + m_2)a_2 = T$ (уравнение движения системы из первого и второго грузов)

$m_1a_{1y} = T - m_1g$ (уравнение движения первого груза)

$a_{1y} + a_2 + a_3 = 0$ (кинематическая связь)

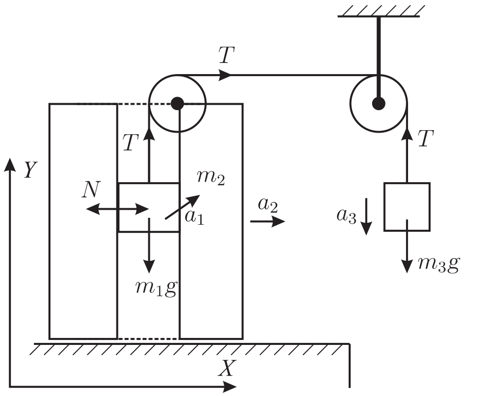
Заметим, что последнее уравнение следует из условия нерастяжимости нити.

Выразим из первых трёх уравнений ускорения грузов:

$$a_3 = \frac{T}{m_3} - g, \qquad a_2 = \frac{T}{m_1 + m_2}, \qquad a_{1y} = \frac{T}{m_1} - g.$$

Подставив их в уравнение кинематической связи, получим соотношение для определения силы натяжения нити:

$$T = \frac{2g}{\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_1 + m_2} + \dfrac{1}{m_3}} = \frac{2m_1 m_3 (m_1 + m_2) g}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3) + m_1 m_3}.$$



Отсюда определим проекции ускорения первого груза:

$$a_{1x} = a_2 = \frac{2m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3) + m_1 m_3} g;$$

$$a_{1y} = \frac{m_2(m_3 - m_1) - m_1^2}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3) + m_1 m_3} g.$$

Следовательно, величина ускорения первого груза

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \frac{\sqrt{(2m_1 m_3)^2 + (m_2(m_3 - m_1) - m_1^2)^2}}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3) + m_1 m_3} g,$$

а угол φ между его направлением и горизонтальной осью определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_{1y}}{a_{1x}} = \frac{m_2(m_3 - m_1) - m_1^2}{2m_1 m_3}.$$

2. Развивая молекулярно-кинетическую теорию, Й. Лошмидт в 1865 г. предложил первый способ оценки размера и массы молекулы. Он использовал известные в его время данные о длине свободного пробега — расстоянии, которое пролетает молекула газа в промежутке между столкновениями (оно выражается через определяемые из опыта коэффициенты вязкости и теплопроводности). Вслед за Лошмидтом получите формулы для оценки по порядку величины размера молекулы r_0 и её массы m_0 по известным данным — длине свободного пробега λ и плотностям вещества $\rho_г$ и $\rho_ж$ в газообразном и жидком состояниях. Получите ответ в общем виде и для числовых значений $\lambda \approx 10^{-7}$ м, $\rho_ж \approx 10^3$ кг/м^3, $\rho_г \approx 1$ кг/м^3.

Решение. За время Δt движущаяся в газе со скоростью v молекула площадью $\sim r_0^2$ столкнётся с молекулами, находящимися в объёме $\Delta V \sim v\,\Delta t\,r_0^2$, а их количество в этом объёме можно оценить как $\Delta N \sim v\,\Delta t\,r_0^2(\rho_г/m_0)$. Следовательно, время между двумя последовательными столкновениями молекулы составляет порядка

$$\tau \sim \frac{1}{\Delta N/\Delta t} = \left(vr_0^2\frac{\rho_г}{m_0}\right)^{-1} = \frac{m_0}{\rho_г r_0^2 v}.$$

За это время молекула проходит расстояние, равное длине её свободного пробега:

$$\lambda \approx v\tau = \frac{m_0}{\rho_г r_0^2}.$$

Для получения ещё одного уравнения заметим, что для жидкого состояния вещества расстояния между молекулами по порядку величины совпадают с их размерами. Учитывая это, можно записать:

$$m_0 \approx \rho_ж r_0^3.$$

Из написанных соотношений получаем:

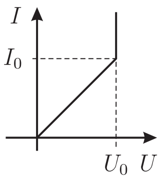
$$r_0 \approx \lambda\frac{\rho_г}{\rho_ж}, \qquad m_0 \approx \frac{\lambda^3\rho_г^3}{\rho_ж^2}.$$

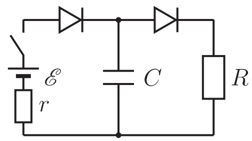
Подставляя числовые данные, находим:

$$r_0 \approx 10^{-10}\ \text{м}, \qquad m_0 \approx 10^{-27}\ \text{кг}.$$

что по порядку величины согласуется с современными данными.

3. Два одинаковых неидеальных диода с вольтамперной характеристикой, приведённой на графике, включены вместе с конденсатором, двумя резисторами, идеальной батарейкой и ключом в электрическую цепь, изображённую на рисунке. Сопротивления резисторов $R = 16$ Ом, $r = 4$ Ом, ЭДС батарейки $\mathscr{E} = 4$ В, электрическая ёмкость конденсатора $C = 100$ мкФ, параметры вольтамперной характеристики диода: $U_0 = 1$ В, $I_0 = 50$ мА.





а) Ключ в цепи замкнули. До какого напряжения зарядится конденсатор?

б) После зарядки конденсатора ключ разомкнули. Какое количество теплоты выделится при разрядке конденсатора на резисторе R? А на каждом из диодов?

Решение. Для приведённых в задаче числовых данных $\mathscr{E} > 2U_0 + I_0(R + r)$, поэтому на каждом из диодов падает напряжение U_0, а ток через диоды больше I_0. Он равен $I = (\mathscr{E} - 2U_0)/(R + r) = 0{,}1$ А, следовательно, на резисторе R падает напряжение $IR = 1{,}6$ В, а на конденсаторе — напряжение $U_1 = U_0 + IR = (rU_0 + R(\mathscr{E} - U_0))/(r + R) = 2{,}6$ В. Именно до такого напряжения и зарядится конденсатор после замыкания ключа.

При размыкании ключа ток через левый диод не течёт, поэтому на нём тепло не выделяется.

Процесс разрядки конденсатора можно разбить на два этапа: на первом этапе на диоде падает напряжение U_0, а ток оказывается больше, чем I_0. Этот случай реализуется, пока напряжение на конденсаторе превосходит величину $U_2 = U_0 + I_0R = 1{,}8$ В.

Далее диод ведёт себя как резистор с сопротивлением $R_д = U_0/I_0 = 20$ Ом. Найдём количества теплоты, выделяющиеся на диоде и резисторе на каждом из этапов.

1. На первом этапе на диоде выделяется тепло, равное произведению напряжения U_0 на протёкший через диод заряд $C(U_1 - U_2)$:

$$Q_д^{\mathrm{I}} = C(U_1 - U_2)U_0 = CU_0R\left(\frac{\mathscr{E} - 2U_0}{r + R} - I_0\right) = 0{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Для того чтобы рассчитать тепло, выделяющееся на резисторе, заметим, что при напряжении U на конденсаторе ток через резистор в рассматриваемом процессе оказывается таким же, как и в случае разрядки конденсатора с напряжением $U - U_0$ без диода. Поэтому количество теплоты

$$Q_R^{\mathrm{I}} = \frac{C(U_1 - U_0)^2}{2} - \frac{C(U_2 - U_0)^2}{2} =$$
$$= \frac{CR^2}{2}(I^2 - I_0^2) = \frac{CR^2}{2}\left(\left(\frac{\mathscr{E} - 2U_0}{r + R}\right)^2 - I_0^2\right) = 0{,}96 \cdot 10^4\ \text{Дж}.$$

Отметим, что для суммарного количества теплоты, выделяющегося на первом этапе, справедлив закон сохранения энергии: $Q_{\text{д}}^{\mathrm{I}} + Q_R^{\mathrm{I}} = \dfrac{CU_1^2}{2} - \dfrac{CU_2^2}{2}$.

2. На втором этапе количества теплоты, выделяющиеся на диоде и резисторе, относятся друг к другу, как величины сопротивлений диода и резистора, то есть

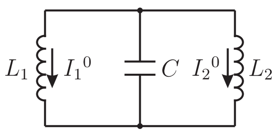
$$\frac{Q_{\text{д}}^{\mathrm{II}}}{Q_R^{\mathrm{II}}} = \frac{R_{\text{д}}}{R} = \frac{5}{4}.$$

Поскольку $Q_{\text{д}}^{\mathrm{II}} + Q_R^{\mathrm{II}} = CU_2^2/2$, то отсюда получаем:

$$Q_R^{\mathrm{II}} = \frac{R}{R_{\text{д}} + R} \cdot \frac{CU_2^2}{2} = \frac{CI_0R(U_0 + I_0R)}{2} = 0{,}72 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж},$$
$$Q_{\text{д}}^{\mathrm{II}} = \frac{R_{\text{д}}}{R_{\text{д}} + R} \cdot \frac{CU_2^2}{2} = \frac{CU_0(U_0 + I_0R)}{2} = 0{,}9 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Складывая количества теплоты, выделившиеся на первом и втором этапах, находим:

$$Q_R = Q_R^{\mathrm{I}} + Q_R^{\mathrm{II}} = \frac{CR^2}{2}\left(\left(\frac{\mathscr{E} - 2U_0}{r + R}\right)^2 + \frac{I_0U_0}{R}\right) = 1{,}68 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж},$$
$$Q_{\text{д}} = Q_{\text{д}}^{\mathrm{I}} + Q_{\text{д}}^{\mathrm{II}} = \frac{CU_0R}{2}\left(\frac{(2\mathscr{E} - 3U_0)R + U_0r}{R(r + R)} - I_0\right) = 1{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$



4. Электрическая цепь состоит из катушек с индуктивностями L_1 и L_2 и конденсатора ёмкостью C, включённых параллельно. В начальный момент времени токи через катушки текут в одну сторону и равны I_1^0 и I_2^0, а конденсатор не заряжен (см. рисунок). Найдите частоту ω возникающих в системе гармонических колебаний и зависимости от времени токов через катушки $I_1(t)$, $I_2(t)$ и заряда на конденсаторе $Q(t)$. Сопротивлением катушек пренебречь.

Решение. Пусть I_1 и I_2 — токи, текущие через катушки, Q — заряд на конденсаторе. Из закона сохранения электрического заряда следует: $\Delta Q/\Delta t = I = I_1 + I_2$.

В контуре, состоящем только из катушек, суммарный магнитный поток сохраняется: $L_1 I_1 - L_2 I_2 = \Phi_0 = L_1 I_1^0 - L_2 I_2^0 = \mathrm{const}$. Следовательно, текущие через катушки токи выражаются через ток, текущий через конденсатор, и постоянную величину магнитного потока:

$$I_1 = \frac{L_2 I}{L_1 + L_2} + \frac{\Phi_0}{L_1 + L_2}, \qquad I_2 = \frac{L_1 I}{L_1 + L_2} - \frac{\Phi_0}{L_1 + L_2}.$$

ЭДС самоиндукции, действующая в каждой из катушек, равна

$$\mathscr{E} = -L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = -\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Поскольку $Q/C = \mathscr{E}$, то заряд на конденсаторе и текущий через него ток удовлетворяют уравнению гармонических колебаний:

$$\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{d^2 Q}{d t^2} + \frac{Q}{C} = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{d^2 I}{d t^2} + \frac{I}{C} = 0.$$

Частота этих колебаний равна $\omega = \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$.

Следовательно, зависимости от времени заряда на конденсаторе и текущего через него тока имеют вид:

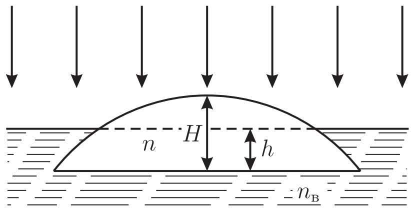
$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \varphi),$$
$$I(t) = Q_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) = I_1(t) + I_2(t).$$

Из начальных условий находим: $\varphi = 0$, $Q_0 = (I_1^0 + I_2^0)/\omega$.

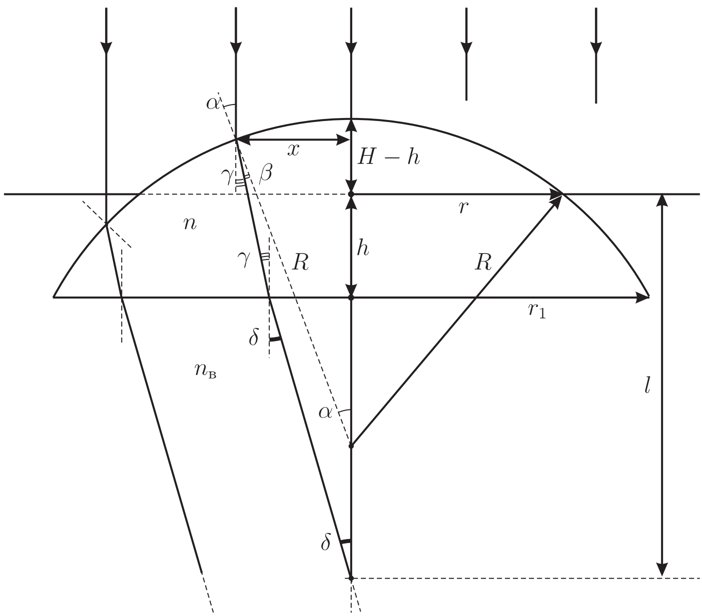
Следовательно,

$$Q(t) = \frac{I_1^0 + I_2^0}{\omega} \sin \omega t,$$
$$I_1(t) = \frac{L_1 I_1^0 - L_2 I_2^0}{L_1 + L_2} + \frac{L_2 (I_1^0 + I_2^0)}{L_1 + L_2} \cos \omega t,$$
$$I_2(t) = \frac{L_2 I_2^0 - L_1 I_1^0}{L_1 + L_2} + \frac{L_1 (I_1^0 + I_2^0)}{L_1 + L_2} \cos \omega t.$$

5. В воду (показатель преломления $n_в$) частично погружена тонкая стеклянная плосковыпуклая линза, причём её плоская сторона горизонтальна и находится под водой, а толщина линзы равна H (см. рисунок). На эту систему вертикально падает параллельный пучок света. На глубинах l и $L > l$ в воде возникают два одинаково ярких изображения. Каковы радиус R выпуклой поверхности линзы, показатель преломления n материала линзы и глубина h её погружения в воду? Отражением света от воды и от линзы, а также поглощением света пренебречь.



Решение. Изображения формируются следующим образом: часть пучка попадает на линзу в воздухе, преломляется на ней, затем преломляется на плоской поверхности линзы в воде и образует одно изображение на глубине l; другая часть пучка попадает на линзу в воде и образует после преломлений второе изображение на глубине $L > l$ (см. рис.).



Выразим расстояния до изображений l и L через радиус R выпуклой поверхности линзы и показатели преломления воды $n_в$ и материала линзы n.

Для этого рассмотрим луч света, проходящий на расстоянии $x \ll R$ от главной оптической оси линзы и попадающий на неё в воздухе. Он падает на сферическую поверхность линзы под углом $\alpha = x/R$ и преломляется под углом $\beta = x/Rn$, поворачивая при этом на угол $\gamma = \dfrac{x}{R}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$. Под этим же углом он падает на плоскую поверхность линзы и преломляется под углом $\delta = \dfrac{x}{R}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{n}{n_{\text{в}}}$, выходя в воду. Поскольку по условию линза тонкая, то $\delta = x/l$, и расстояние l до изображения можно определить из следующего соотношения:

$$\frac{x}{l} = \frac{x}{R}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{n}{n_{\text{в}}}, \qquad \text{то есть} \qquad l = \frac{Rn_{\text{в}}}{n-1}$$

Аналогичным образом, рассматривая часть пучка, падающую на линзу в воде, находим расстояние до второго изображения:

$$L = \frac{R}{\dfrac{n}{n_{\text{в}}} - 1} = \frac{Rn_{\text{в}}}{n - n_{\text{в}}}$$

(эта формула получается заменой в выражении для l показателя преломления воздуха, равного 1, на показатель преломления воды $n_{\text{в}}$).

Из полученных соотношений находим:

$$\frac{l}{L} = \frac{n - n_{\text{в}}}{n-1}, \qquad \text{и} \qquad n = \frac{n_{\text{в}}L - l}{L - l}, \qquad R = \frac{lL(n_{\text{в}} - 1)}{n_{\text{в}}(L - l)}.$$

Найдём теперь глубину h погружения линзы в воду. Поскольку изображения оказываются одинаково яркими, то части пучка, падающие на линзу в воздухе и воде, переносят одинаковую энергию. Поэтому площади горизонтальных оснований частей линзы, покрытых и не покрытых водой, должны совпадать, и площадь основания выступающей из воды части линзы составляет $1/2$ от площади основания всей линзы.

Найдём связь высоты $(H - h)$ выступающей из воды части линзы с радиусом r её основания (см. рисунок). По теореме Пифагора с учётом малости H по сравнению с R имеем:

$$r^2 = R^2 - (R - (H - h))^2 \approx 2R(H - h),$$

откуда площадь основания выступающей из воды части линзы равна $S_1 = \pi r^2 \approx 2\pi R(H - h)$.

Аналогичным образом, площадь основания всей линзы равна $S = \pi r_1^2 \approx 2\pi RH$, и поскольку $S_1 = S/2$, то $h = H/2$.

Экспериментальный тур

Состоялся 11 марта 2006 года.

Экспериментальный тур проводится начиная с самой первой Московской физической олимпиады (1939 год). До 2003 года включительно именно на экспериментальном туре определялись победители олимпиады.

С 2004 года формальные итоги олимпиады подводятся только по теоретическим турам. На экспериментальный тур, традиция проведения которого сохранилась, приглашаются по итогам теоретических туров московские школьники 9–11 классов. Это даёт возможность этим школьникам лучше подготовиться к участию во Всероссийской олимпиаде по физике, где при подведении итогов в равной степени учитываются результаты как теоретического, так и экспериментального туров.

Экспериментальный тур Московской физической олимпиады состоит из двух экспериментальных работ. На выполнение каждой работы отводится 2 астрономических часа. Школьникам каждого класса (9, 10 и 11) предлагаются одни и те же работы, но разные участники могут выполнять их в разной последовательности (спустя 2 часа после начала тура школьники сдают отчёт по первой работе и меняются местами с теми, кто выполнял другую работу; тем самым номера работ «1» и «2» в каждом классе являются условными).

Для выполнения каждой работы участнику тура выдаётся краткое описание (именно эти краткие описания и приводятся здесь ниже) и комплект необходимого оборудования (измерительные инструменты, приборы, детали, изучаемый объект). Сотрудники жюри дают разъяснения перед выполнением каждой работы, отвечают на вопросы школьников по ходу её выполнения, устраняют возникающие при этом технические неполадки.

Обращаем ваше внимание, что описания работ являются именно *краткими.* Они дают достаточно полное представление о работе, но не заменяют собой возможности реальной работы с оборудованием, разъяснений, ответов на вопросы и разбора решений после проведения тура. Пользуясь только приведёнными описаниями, в принципе невозможно *полностью* разобраться в заданиях экспериментальных туров (в отличие от теоретических туров, где вся необходимая информация содержится в тексте условия задачи).

9 класс

9.1. Измерение удельной теплоёмкости.

Оборудование: термометр, стаканчики, миллиметровая бумага, штатив, нитка, горячая и холодная вода — по требованию, часы (можно использовать наручные часы).

Задание: измерить удельные теплоёмкости груза и пятака[3].

9.2. Измерение сопротивления резистора в «Чёрном Ящике».

Оборудование. В «Чёрном Ящике» (вообще то он не очень чёрный, так называют объект, который нужно исследовать без нарушения его целостности) находится ровно два элемента — маленькая лампочка и резистор. Есть ещё одна такая же лампочка, резистор 75 Ом, миллиамперметр, вольтметр, потенциометр (реостат с тремя выводами) сопротивлением 10 Ом, батарейка, провода.

Задание: определить экспериментально сопротивление резистора внутри Ящика. Определить схему Ящика (параллельно в нём элементы подключены, или последовательно).

10 класс

10.1. Исследование магнита.

Оборудование: магнит — 1 шт., металлические уголки — 5 шт. (заглушки гнёзд в системном блоке компьютеров), динамометр — 1 шт., прочный капроновый шпагат — 1,5 м, липкая бумага, миллиметровая бумага, плотная бумага, её «плотность» (масса одного квадратного метра) 160 г/м^2 — 1 лист формата А4, две палочки со срезанными ватными тампонами, мерная лента.

Задание: найти зависимость от расстояния силы притяжения магнита и отогнутой под прямым углом части железного уголка (она располагается параллельно большой грани магнита). Построить график этой зависимости.

10.2. Измерение сопротивления резистора в «Чёрном Ящике».

Оборудование. В «Чёрном Ящике» (вообще то он не очень чёрный, так называют объект, который нужно исследовать без нарушения его целостности) находится ровно два элемента — полупроводниковый диод и резистор. Есть ещё один точно такой же диод, резистор 75 Ом (диод — крошечный полупрозрачный цилиндр с двумя выводами, резистор чуть

[3]Монета достоинством 5 копеек, находившаяся в обращении в СССР (и странах бывшего СССР) в 1961–1998 годах.

побольше, он более полосат, чем диод :), универсальный измерительный прибор, потенциометр (реостат с тремя выводами) сопротивлением 470 Ом, батарейка в корпусе с выводами, провода.

Задание: определить экспериментально сопротивление резистора в «Чёрном Ящике», определить схему соединения элементов внутри Ящика (параллельно, или последовательно).

ВНИМАНИЕ: миллиамперметр и диод НЕЛЬЗЯ подключать прямо к батарейке — сгорят!

Про диод знать ничего не нужно кроме того, что это нелинейный элемент и проводит ток только в одну сторону.

11 класс

11.1. Измерение плотности.

Оборудование: ареометр, нитка — 0,5 м, металлическая проволока в пластиковой изоляции — 2 куска по 20 см, мензурка, вода, миллиметровая бумага.

Задание: измерить среднюю плотность (плотность — это масса, приходящаяся на единицу объёма) проволоки вместе с изоляцией. Считать, что вода имеет плотность 1000 кг/м^3.

11.2. Исследование «Чёрного Ящика».

Оборудование: «Чёрный Ящик», содержащий ровно два элемента, которые не соединены друг с другом, две миниатюрные лампочки, потенциометр (реостат с тремя выводами) сопротивлением __ кОм (значение сопротивления реостата указывалось индивидуально для каждого комплекта оборудования), генератор звуковой, провода.

Задание: определить экспериментально содержимое Ящика и измерить параметры помещённых в него элементов.

Оглавление

Предисловие **3**

Окружной этап **5**
11 класс 5

Городской этап. Первый теоретический тур **12**
7 класс 12
8 класс 14
9 класс 16
10 класс 19
11 класс 24

Городской этап. Второй теоретический тур **29**
8 класс 29
9 класс 32
10 класс 37
11 класс 44

Экспериментальный тур **52**
9 класс 53
10 класс 53
11 класс 54