ББК 22.3я721+74.262.22
О54

О54

Олимпиады 2008–2009. Физика. — Задачи московских олимпиад школьников: Под ред. М. В. Семёнова, А. А. Якуты — М.: МЦНМО, 2009. — 70 с.: ил.

ISBN 978–5–94057–484–2

Приводятся условия и решения задач 1-го тура Московской олимпиады школьников по физике 2009 года (7–11 классы) с ответами; условия задач городского этапа Московской региональной олимпиады школьников по физике (теоретические туры, 7–11 классы) 2008 года и окружного этапа олимпиады 2008 года в 11 классе с ответами и решениями, а также описания практических работ экспериментального тура 2008 года (9–11 классы).

Для участников олимпиады, школьников, учителей, родителей, руководителей школьных кружков, организаторов олимпиад.

ББК 22.3я721+74.262.22

Тексты заданий, решений, комментариев и иллюстрации составили и подготовили: Андрианов А. В., Варламов С. Д., Горбатый И. Н., Гуляев А. В., Зильберман А. Р., Кротов С. С., Парфёнов К. В., Погожев В. А., Ромашка М. Ю., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Харабадзе Д. Э., Шведов О. Ю., Якута А. А., Якута Е. В.

Поддержано Департаментом образования города Москвы в рамках программы «Одарённые дети»

Электронная версия `http://www.mccme.ru/olympiads/mfo/` (www-сервер МЦНМО).

Олимпиады 2008–2009. Физика.
Задачи московских олимпиад школьников.

Технический редактор
Кулыгин Алексей Кириллович

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подп. к печати 12.03.2009.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Печать офсетная. Объём 4,5 печ. л.
Заказ . Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский переулок, дом 11.
Телефоны: (499)241–05–00, (499)241–12–37, (499)241–72–85.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография „САРМА“».

Олимпиады 2008–2009.
Физика.

Задачи московских олимпиад школьников

Москва
Издательство МЦНМО
2009

Предисловие

В 2008 году олимпиада школьников по физике состоялась в городе Москве в шестьдесят девятый раз. Олимпиада проводилась в соответствии с Положением о Московской региональной олимпиаде школьников[1].

В соответствии с Положением, которое действовало до 2008 года, олимпиада проводилась ежегодно Департаментом образования города Москвы, Советом ректоров вузов Москвы и Московской области, окружными управлениями образования, образовательными учреждениями, при участии образовательных учреждений, научных организаций и обществ. Координацию организационно-финансового обеспечения проведения Олимпиады осуществлял по поручению Департамента Московский институт открытого образования (МИОО).

В олимпиаде могли принимать участие все желающие школьники.

Олимпиада проводилась в три этапа.

Школьный этап проводился общеобразовательными учреждениями по заданиям, рекомендованным методической комиссией по предмету.

Окружной этап проводился окружным оргкомитетом, по заданиям, рекомендованным методической комиссией по предмету. По согласованию с Городским оргкомитетом допускалось проведение окружного этапа Олимпиады вузом или группой вузов при условии соблюдения Положения, согласования с Городским оргкомитетом сроков и с методической комиссией по предмету — заданий Олимпиады.

Городской этап проводился Городским оргкомитетом, по заданиям, рекомендованным методической комиссией по предмету.

В соответствии с ранее действовавшим Положением о Всероссийской олимпиаде школьников[2] городской этап олимпиады города Москвы приравнивался к 4-му этапу Всероссийской олимпиады школьников. Окружной этап Олимпиады приравнивался к 3-му этапу Всероссийской олимпиады школьников. Положениями о Московской региональной олимпиаде школьников и о Всероссийской олимпиаде школьников для победителей (диплом первой степени) и призёров (дипломы второй и третьей степени) третьего (окружного) и четвёртого (городского) этапов олимпиады были предусмотрены льготы при поступлении в вузы.

[1] Приказ Департамента образования г. Москвы от 26.12.2003 № 1083 «О введении Положения о московской региональной олимпиаде школьников», опубл. **http://www.educom.ru/ru/dialog/olympiads/order.php**

[2] Утверждено приказом Минобразования России от 30.10.2003 № 4072, опубл. **http://www.educom.ru/ru/dialog/olympiads/thesis.php**

В 2007/2008 учебном году окружной этап Московской региональной олимпиады школьников по физике состоялся 2 февраля 2008 года. Для 11-классников этот этап проводился на Физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и в вузах города Москвы. В данной брошюре приводятся задачи (с решениями) варианта 11 класса, разработанного городской Методической комиссией. Большая часть вузов, принимавших участие в проведении окружного этапа олимпиады, в соответствии с Положением, проводила окружной этап по своим вариантам, согласованным с городской Методической комиссией.

Городской этап олимпиады для учеников 7-х классов проводился в один тур и 8–11-х классов — в два тура. Первый тур прошёл 10 февраля 2008 года на физическом факультете МГУ, в нём приняли участие 1978 человек (7 кл. — 239, 8 кл. — 323, 9 кл. — 310, 10 кл. — 496, 11 кл. — 610).

На второй теоретический тур (состоялся 29 февраля 2008 г.) были приглашены ученики 8–11 классов, показавшие лучшие результаты в первом туре (и/или имеющие персональные приглашения), в количестве: 8 кл. — 133 чел., 9 кл. — 128 чел., 10 кл. — 148 чел., 11 кл. — 255 чел.

По результатам первого тура в 7 классе и второго тура в 8–11 классах победителями и призёрами олимпиады были признаны 49 учащихся 7 класса, 63 учащихся 8 класса, 52 учащихся 9 класса, 36 учащихся 10 класса, 101 учащийся 11 класса (всего 301 человек). С полным списком победителей и призёров можно ознакомиться в сети Internet по адресу **http://genphys.phys.msu.ru/ol/2008**

В данной брошюре опубликованы все задачи первого и второго теоретических туров с подробными решениями.

По итогам второго тура в 9–11 классах 58 школьников были приглашены на экспериментальный тур (прошёл 15 марта 2008 года в МИОО). Экспериментальный тур не влиял на распределение дипломов победителей и призёров олимпиады; он проводился с целью отбора кандидатов в сборную команду г. Москвы для участия в заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по физике.

В настоящей брошюре опубликованы краткие описания заданий, предлагавшихся на экспериментальном туре.

В связи с выходом новых нормативных документов (приказы Минобрнауки России от 22.10.07 г. № 285 и № 286) порядок проведения олимпиад в РФ начиная с 2009 года изменился. Московская олимпиада школьников по физике в настоящее время не имеет статуса этапа Всероссийской олимпиады школьников. Статус Московской олимпиады школьников определён приказом Минобрнауки России от 02.09.08 г. № 254, в соответствии с которым ей присвоен третий уровень. При поступлении в государственные и муниципальные образовательные учреждения среднего профессионального образования, а также в государственные и муниципальные образовательные учреждения высшего профессионального образования победители и призёры олимпиады по решению образовательного учреждения имеют право в течение одного года с момента утверждения списков победителей и призёров олимпиады на получение одной из следующих льгот:

быть приравненными к лицам, набравшим максимальное количество баллов по единому государственному экзамену по предмету, соответствующему профилю олимпиады;

быть приравненными к лицам, успешно прошедшим дополнительные вступительные испытания профильной (при поступлении в образовательные учреждения высшего профессионального образования), творческой и (или) профессиональной направленности, предусмотренные Законом Российской Федерации «Об образовании», по предмету, соответствующему профилю олимпиады, в порядке, определяемом приёмной комиссией образовательного учреждения;

быть зачисленными в образовательное учреждение без вступительных испытаний на направления подготовки (специальности), соответствующие профилю олимпиады.

С нормативными документами, определяющими порядок проведения олимпиады, а также с другой информацией о различных олимпиадах можно более подробно ознакомиться на портале Российского совета олимпиад школьников (**http://rsr-olymp.ru**).

В брошюру также включены условия задач 1-го тура Московской олимпиады школьников по физике 2009 года с ответами. Решения задач данной олимпиады будут опубликованы в течение 2009 года в журнале «Квант».

Электронная версия настоящей брошюры, а также материалы Московской физической олимпиады ряда лет опубликованы на сервере Московского центра непрерывного математического образования (**http://www.mccme.ru/olympiads/mfo**). Оперативная информация об олимпиаде и списки победителей публикуются на странице кафедры общей физики Физического факультета МГУ (**http://genphys.phys.msu.ru/ol**).

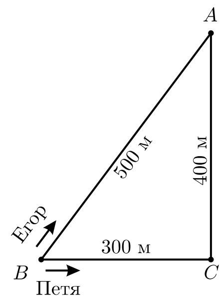
Олимпиада 2008/2009 уч. года. 1-й тур

Состоялся 1 марта 2009 года.

7 класс

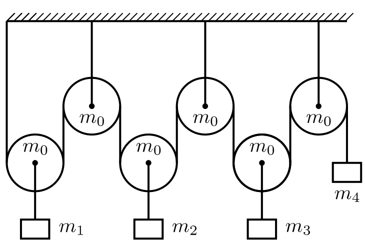
На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

1. Два друга — Егор и Петя — устроили гонки на велосипедах вокруг квартала в дачном посёлке (см. рисунок). Стартовав одновременно из точки B в разные стороны, Егор — вдоль улицы BA, Петя — вдоль улиц BC и CA, друзья встретились через 4 минуты в точке A и продолжили гонки с постоянными по модулю скоростями, объезжая квартал раз за разом в противоположных направлениях. Через какое минимальное время после этой встречи они снова окажутся вместе в точке A?



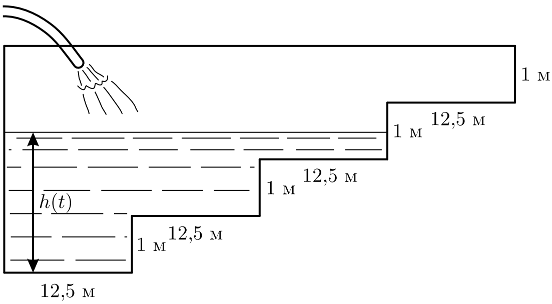
Ответ: минимальное время до повторной встречи в точке A составляет 48 минут = 0,8 часа.

2. В системе, изображённой на рисунке, масса самого правого груза равна $m_4 = 1$ кг, а массы всех блоков одинаковы и равны $m_0 = 300$ г. Система уравновешена и неподвижна. Найдите массы грузов m_1, m_2 и m_3. Массой троса и трением в блоках пренебречь.

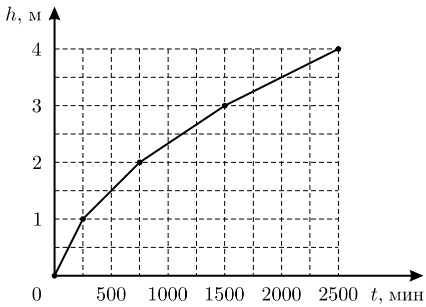


Ответ: $m_1 = m_2 = m_3 = 2m_4 - m_0 = 1{,}7$ кг.

3. Пятидесятиметровый бассейн шириной 20 м имеет профиль дна, показанный на рисунке: через каждые $12,5$ м глубина бассейна увеличивается на 1 м. Пустой бассейн начинают заполнять водой, наливая ее со скоростью 1000 литров в минуту. Построить график зависимости высоты h уровня воды над самой глубокой частью дна бассейна от времени t и определить, через какое время бассейн заполнится водой доверху.



Ответ: см. график; бассейн заполнится водой доверху за 2500 минут = 41 час 40 минут.



4. У школьника Андрея есть стеклянная пробирка массой $M = 80$ г и вместительностью $V = 60$ мл. Он опустил пробирку в цилиндрический сосуд с водой и постепенно насыпа́л на дно пробирки песок до тех пор, пока она не погрузилась в воду по горлышко (см. рисунок). Затем Андрей измерил массу песка, находившегося в пробирке в этот момент, и она оказалась равной $m = 12$ г. Внутренний радиус сосуда, в который опущена пробирка, равен $R = 5$ см. Плотность воды равна $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см^3. Определите по этим данным плотность стекла пробирки и вычислите, на

сколько поднялся уровень воды в сосуде в результате погружения пробирки в воду.

Ответ: $\rho_{\text{ст}} = \dfrac{M_{\text{в}}}{M + m - \rho_{\text{в}} V} = 2{,}5$ г/см^3; $\Delta h = \dfrac{M + m}{\rho_{\text{в}} \pi R^2} \approx 1{,}17$ см.

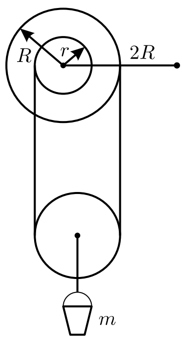
8 класс

На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

1. По прямой реке с постоянной скоростью $u = 5$ м/с плывёт баржа длиной $L = 100$ м. На корме баржи стоит матрос. Он начинает ходить по барже от кормы к носу и обратно. Вперёд он идет с постоянной относительно баржи скоростью $v_1 = 1$ м/с, а назад — с постоянной относительно баржи скоростью $v_2 = 2$ м/с. Какой путь пройдёт матрос относительно берега реки, если пройдёт по барже туда и обратно $n = 10$ раз?

Ответ: матрос пройдет относительно берега реки путь $s = nLu\dfrac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} = 7500$ м.

2. Так называемый «китайский ворот» представляет собой два цилиндрических вала радиусами r и R, насаженных на общую ось, закреплённую горизонтально (на рисунке показан вид сбоку). На валы в противоположных направлениях намотана верёвка, на которой висит подвижный блок такого радиуса, что свободные участки веревки практически вертикальны. К оси блока прикреплён груз массой m. Ворот снабжён ручкой, конец которой находится на расстоянии $2R$ от оси ворота.



1) Ворот вращают за ручку так, что он делает n оборотов в секунду. С какой скоростью при этом движется груз, если верёвка нигде не проскальзывает?

2) Какую силу необходимо прикладывать к концу ручки ворота для того, чтобы равномерно поднимать груз, если верёвка и блок очень лёгкие, а трения нет?

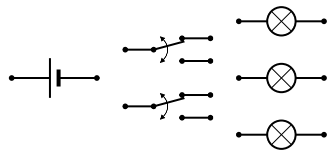
Ответ.

1) При вращении ручки ворота с частотой n оборотов в секунду груз движется со скоростью $v = \pi(R - r)n$.

2) Для того, чтобы равномерно поднимать груз, к концу ручки ворота необходимо прикладывать силу $F = \dfrac{mg(R - r)}{4R}$.

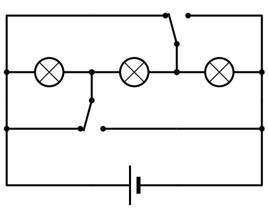
3. Нарисовать схему, состоящую из батарейки, двух переключателей и трёх лампочек (см. рисунок) и имеющую при различных положениях переключателей следующие режимы работы:

1) Горит первая лампа.
2) Горит вторая лампа.
3) Горит третья лампа.
4) Горят все три лампы.



В последнем случае каждая из ламп должна гореть так же ярко, как и тогда, когда она горит одна.

Ответ: возможная схема включения лампочек изображена на рисунке.



4. Школьник Петя на каникулах залил с дедушкой каток на даче площадью около 100 м^2. После морозов началась оттепель с дождём и снегом, а потом снова ударили морозы -10 °C. Приехав в субботу на дачу, Петя обнаружил, что примерно 5% площади катка покрылось «грибами» из льда — наростами толщиной около 1 см и площадью примерно 100 см^2. Пете очень хотелось покататься на коньках, и он решил выровнять каток, «выгладив» его горячим утюгом. Примерно сколько времени понадобится для этого, и успеет ли Петя покататься в воскресенье? Мощность утюга — 2 кВт, удельная теплоёмкость льда $C_л = 2{,}1$ Дж/(г · °C), удельная теплота плавления льда 340 Дж/г, удельная теплоёмкость воды $C_л = 4{,}2$ Дж/(г · °C), плотность льда $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3. Можно считать, что каждый «гриб» достаточно разгладить до высоты 1 мм, при разглаживании вода нагревается до $+50$ °C, потери теплоты на нагревание окружающего утюг воздуха малы, а потери времени на распределение воды по достаточной площади льда и на переход к следующему «грибу» составляют около 20 секунд.

Ответ: на «выглаживание» катка уйдёт примерно 6 часов, так что Петя в воскресенье сможет покататься.

(Всего на катке находятся 500 ледяных «грибов». Время на плавление одного «гриба» утюгом ≈ 23 секунды, с учётом дополнительных потерь 20 секунд на один «гриб» тратится не меньше 43 секунд.)

9 класс

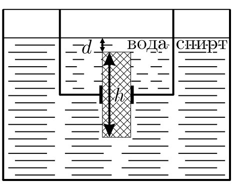
На выполнение задания отводилось 4 астрономических часа.

1. Оцените, на какой широте φ наблюдатель не сможет видеть ни одного спутника Земли, находящегося на геостационарной орбите, то есть как бы «висящего» над одной точкой земной поверхности. Радиус Земли равен $R_З$, ускорение свободного падения на поверхности Земли — g, период обращения (сутки) — T.

Ответ: $\varphi > \arccos \sqrt[3]{\dfrac{4\pi^2 R_З}{gT^2}}$.

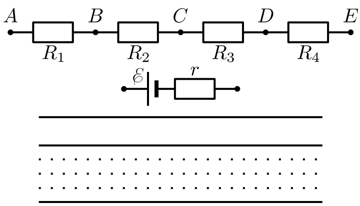
Заметим, что после подстановки известных чисел в эту формулу получается, что $\varphi > 81{,}4°$. В таких высоких широтах живут только полярники, так что практически все жители Земли могут пользоваться спутниковыми «тарелками»!

2. Малый сосуд удерживают внутри большого так, как показано на рисунке. В дне малого сосуда есть отверстие со втулкой, в которое вставлен цилиндр. Высота цилиндра $h = 21$ см, он может перемещаться относительно втулки без трения и только по вертикали. В малом сосуде находится вода, в большом — спирт, и при этом цилиндр покоится. На какой глубине d под водой находится верхнее основание цилиндра? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность спирта $\rho_с = 790$ кг/м^3, плотность цилиндра $\rho = 600$ кг/м^3.

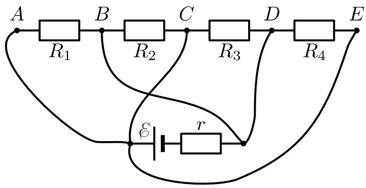


Ответ: $d = \dfrac{\rho_с - \rho}{\rho_в - \rho_с} = 19$ см.

3. Резисторы сопротивлениями $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 40$ Ом и $R_4 = 80$ Ом припаяны к клеммам A, B, C, D и E так, как показано на рисунке. Имеется источник тока с ЭДС $\mathscr{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом, а также много соединительных проводов малого сопротивления, которые можно подключать к источнику и к любой из клемм. Как нужно соединить источник и резисторы, чтобы общая тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, была максимальной? Чему равна эта мощность?



Ответ. Искомая тепловая мощность $N_{\max}$ максимальна, как нетрудно доказать, когда сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника $r = 5$ Ом. Это достигается с наибольшей точностью при параллельном соединении всех резисторов (см. рис.), так что их общее сопротивление $R = (16/3)$ Ом $\approx 5{,}33$ Ом, а $N_{\max} = \mathscr{E}^2 R/(R + r)^2 \approx 7{,}19$ Вт.



4. Палка, стоящая вертикально на горизонтальной площадке, освещаемой солнечным светом, имеет высоту $h = 1{,}2$ м и отбрасывает тень длиной $L = 0{,}9$ м. Палку начинают медленно наклонять в направлении отбрасываемой ею тени, так, что её нижний конец не сдвигается с места. Длина тени при этом до определённого момента увеличивается, а потом начинает уменьшаться. Чему была равна максимальная длина тени от палки?

Ответ: $L_{\max} = \sqrt{L^2 + h^2} = 1{,}5$ м.

10 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

1. Удав решил установить мировой рекорд в прыжках в высоту среди удавов. Удав может из положения «свернувшись лёжа» выпрямиться почти вертикально и разогнаться до скорости V. Длина Удава L. Каким может быть рекорд? Как должен двигаться Удав, чтобы установить рекорд? Масса Удава распределена равномерно по его длине.

Ответ. Удав на максимальной высоте должен сложиться пополам так, чтобы его середина оказалась над планкой, а голова и хвост свешивались вниз. Рекордная высота равна $\dfrac{3L}{4} + \dfrac{V^2}{2g}$.

2. Автомобиль с задними ведущими колёсами въезжает вверх по прямолинейному участку дороги, образующему с горизонтом угол α, и останавливается. Через некоторое время после этого водитель резко нажимает на газ и одновременно отпускает тормоз. С каким максимальным ускорением может начать двигаться автомобиль, если коэффициент трения его колес о дорогу равен μ, а мощность двигателя достаточно велика? Центр тяжести автомобиля находится на расстоянии h от дороги посередине между колёсами, расстояние между осями передних и задних колес равно $2L$.

Ответ: $a = \left(\dfrac{\mu L \cos\alpha}{2L - \mu h} - \sin\alpha\right) g$, при условии $L > \mu h$.

3. Горизонтальная платформа, на которую положили без начальной скорости груз массой m, совершает f раз в секунду такие колебания: сначала она движется вправо с постоянным ускорением a, потом мгновенно останавливается и возвращается в начальное положение с постоянным ускорением $a/2$. Коэффициент трения между грузом и платформой равен $\mu < 1$, ускорение $a \gg g$, частота $f \gg 1$ Гц. В каком направлении, и по какому закону будет двигаться груз, и будет ли он вообще двигаться? Считать, что скорость движения груза всегда много меньше максимальной скорости движения платформы.

Ответ: груз будет двигаться влево со средним ускорением, равным по модулю $\mu g \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

4. В цилиндрический стакан объемом $V = 200$ мл и сечением $S = 20$ см^2, стоящий на столе при комнатной температуре $T_к = 20$ °C, положили кусок льда массой $m = 100$ г, находящийся при температуре $T_0 = 20$ °C, и накрыли стакан плотно прилегающей крышкой. Оцените силу, которая потребуется, чтобы оторвать крышку от стакана сразу после того, как лёд растает. Считайте, что теплота поступает в стакан только снизу, крышку отрывают сразу по всему периметру, атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

Ответ: сила, которая потребуется, чтобы оторвать крышку от стакана сразу после того, как лёд растает, примерно равна $F = p_{\text{а}} S \left(1 - \dfrac{\rho_{\text{в}} T_0 (\rho_{\text{л}} V - m)}{\rho_{\text{л}} T_{\text{к}} (\rho_{\text{в}} V - m)}\right) \approx 32$ Н.

5. Пять сторон правильного шестиугольника образованы одинаковыми диэлектрическими равномерно заряженными палочками. При этом в точке O, находящейся в центре шестиугольника, потенциал данной системы зарядов равен φ_0, а напряжённость электрического поля равна $\vec{E}_0$. Найдите, какими станут потенциал φ и напряжённость электрического поля $\vec{E}$ в точке O, если убрать одну из заряженных палочек.

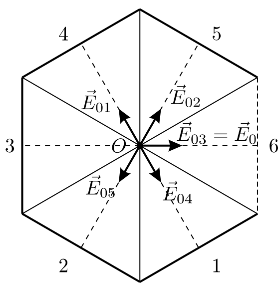


Рисунок 1

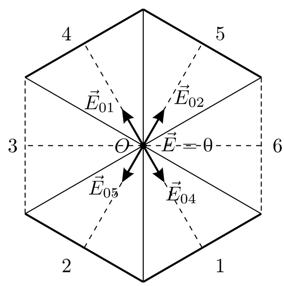


Рисунок 2а

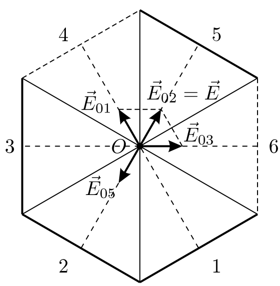


Рисунок 2б

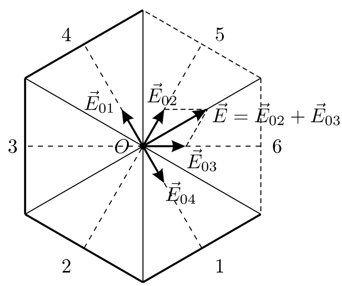


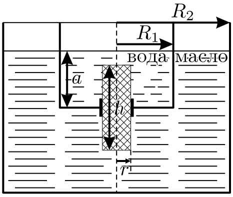
Рисунок 2в

Ответ. $\varphi = \dfrac{4}{5}\varphi_0$ при удалении любой из палочек. $\vec{E}$ зависит от того, какую палочку удаляют (см. рисунки 2а, 2б, 2в): если удалить палочку 3, то $\vec{E} = 0$; если удалить палочку 2 или 4, то $|\vec{E}| = |\vec{E}_0|$, а вектор $\vec{E}$ повёрнут относительно вектора $\vec{E}_0$ на угол $60°$; если удалить палочку 1 или 5, то $|\vec{E}| = \sqrt{3}|\vec{E}_0|$, а вектор $\vec{E}$ повёрнут относительно вектора $\vec{E}_0$ на угол 30°.

11 класс

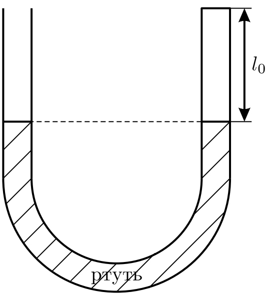
На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

1. Один цилиндрический сосуд радиусом R_1 удерживают внутри другого, радиусом R_2, так, как показано на рисунке. В дне малого сосуда есть отверстие со втулкой, в которое вставлен деревянный цилиндр радиусом r и высотой $h = 21$ см; он может перемещаться относительно втулки без трения только по вертикали. В малый сосуд налита вода до уровня $a = 30$ см, а в большой — масло, и при этом цилиндр покоится. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность масла $\rho_м = 790$ кг/м^3, плотность цилиндра $\rho = 790$ кг/м^3. Какая часть объёма цилиндра находится в воде, а какая — в масле? При каком соотношении между $\rho_в$, $\rho_м$, r, R_1 и R_2 равновесие цилиндра будет устойчивым, то есть при его смещении вверх или вниз будут возникать силы, стремящиеся вернуть его обратно, к положению равновесия?



Ответ. В воде находится часть объёма цилиндра, равная $n = \dfrac{a}{h} - \dfrac{\rho_м - \rho}{\rho_в - \rho_м} = \dfrac{11}{21}$, а в масле — часть объёма, равная $1 - n = \dfrac{10}{21}$. Равновесие будет устойчивым, если $\rho_м \dfrac{R_2^2 - R_1^2 + r^2}{R_2^2 - R_1^2} > \rho_в \dfrac{R_1^2 - r^2}{R_1^2}$.

2. Один из концов U-образной трубки постоянного сечения, заполненной ртутью, наглухо закрыли (см. рисунок). Воздух в закрытом конце трубки стали медленно нагревать, измеряя зависимость его давления p от температуры T. Как оказалось, эта зависимость в начале нагревания приближённо является линейной: $p \approx p_0 \left(1 + \alpha \dfrac{T - T_0}{T_0}\right)$, где $p_0 = 760$ мм рт. ст. — атмосферное давление, T_0 — абсолютная температура окружающей



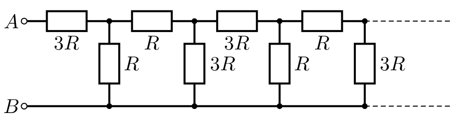
среды, $\alpha = 0{,}5$. Найдите высоту l_0 столба воздуха в закрытом конце трубки в начале процесса. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3.

Ответ: $l_0 = \dfrac{h_0}{2(\alpha^{-1} - 1)} = 380$ мм, где $h_0 = \dfrac{p_0}{\rho g} = 760$ мм.

3. Три прилегающие друг к другу грани кубика заряжены равномерно с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, а остальные грани — с плотностью заряда $-\sigma$. Найти напряжённость $\vec{E}$ электрического поля в центре кубика.

Ответ: $|\vec{E}| = \dfrac{\sigma}{\sqrt{3}\varepsilon_0}$, вектор $\vec{E}$ направлен вдоль пространственной диагонали кубика от его положительно заряженного «угла» к отрицательно заряженному.

4. Бесконечная цепочка из одинаковых звеньев состоит из резисторов сопротивлениями $3R$ и R, соединённых, как показано на рисунке. Найти её сопротивление R_{AB} между входными контактами A и B.



Ответ: $R_{AB} = (1{,}3 + \sqrt{5{,}89})R \approx 3{,}73R$.

5. Тонкая плосковогнутая рассеивающая линза прижата плоскостью к торцу цилиндрической трубки. В трубку вставлена плосковыпуклая собирающая линза так, что главные оптические оси линз совпадают с осью трубки, а собирающая линза обращена плоской стороной к рассеивающей. Собирающую линзу можно перемещать вдоль оси трубки. Если на первую линзу вдоль оси направить узкий параллельный пучок света, то при некотором расстоянии между линзами из системы выйдет также параллельный пучок. Если же пространство между линзами заполнено жидкостью, то для получения параллельного пучка расстояние между линзами необходимо увеличить в 1,5 раза. Найти показатель преломления жидкости.

Ответ: $n_ж = 1{,}5$.

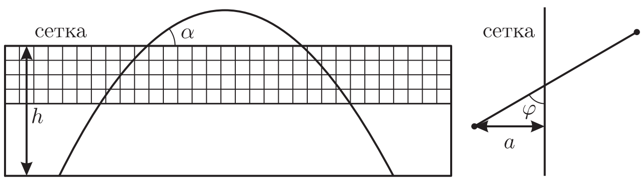
Окружной этап 2007/2008 уч. года

Состоялся 2 февраля 2008 года.

11 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

1. При игре в волейбол игрок отбил мяч у самой земли. На первом рисунке показана проекция траектории мяча на вертикальную плоскость сетки. Касательная к этой проекции образует угол $\alpha = 30^\circ$ с верхней линией сетки в точке пересечения с ней.



На втором рисунке показан вид сверху: игрок в момент удара находился на расстоянии $a = 3{,}5$ м от сетки, а плоскость траектории образует с сеткой угол $\varphi = 60^\circ$. Известно, что скорость мяча сразу после удара была направлена под углом $\theta = \operatorname{arctg} 1{,}2$ к горизонту. На какой высоте над землёй траектория мяча пересекает плоскость сетки? Высота сетки $h = 2{,}4$ м. Мяч считать материальной точкой, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Введём систему координат, направив горизонтальную ось x в сторону сетки перпендикулярно ей, ось y — вдоль пересечения плоскости сетки с поверхностью Земли, ось z — вертикально вверх. Начало координат выберем на поверхности Земли в точке удара по мячу. Обозначим через g ускорение свободного падения.

Найдём горизонтальную проекцию скорости мяча $v_\text{г}$. Для этого заметим, что проекция скорости мяча на вертикальную ось z у поверхности Земли равна $v_\text{г} \cdot \operatorname{tg}\theta$, а на высоте h она, в соответствии с законом сохранения механической энергии, равна $v_\text{в} = \sqrt{(v_\text{г} \cdot \operatorname{tg}\theta)^2 - 2gh}$. Угол α связан с указанными проекциями скорости соотношением: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_\text{в}}{v_\text{г}\cos\varphi}$.

Отсюда

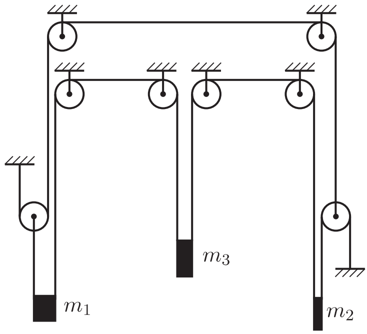
$$(v_{\text{г}} \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\alpha)^2 = (v_{\text{г}} \cdot \operatorname{tg}\theta)^2 - 2gh, \quad \text{и} \quad v_{\text{г}} = \sqrt{\frac{2gh}{(\operatorname{tg}\theta)^2 - (\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\alpha)^2}}.$$

Для того, чтобы ответить на вопрос задачи, заметим, что мяч пересекает плоскость сетки через промежуток времени $t = \dfrac{a}{v_{\text{г}} \sin\varphi}$. В этот момент времени координата z мяча равна

$$z = v_{\text{г}} \operatorname{tg}\theta \cdot t - \frac{gt^2}{2} = \frac{a \cdot \operatorname{tg}\theta}{\sin\varphi} - \frac{ga^2}{2(v_{\text{г}} \sin\varphi)^2} =$$

$$= \frac{a \cdot \operatorname{tg}\theta}{\sin\varphi} - \frac{a^2(\operatorname{tg}^2\theta - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\varphi)}{4h\sin^2\varphi} \approx 2{,}54 \text{ м}.$$

2. На рисунке изображена система, состоящая из блоков, грузов и верёвок. Массы грузов 1 и 2 известны: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 6$ кг.



В каком интервале должна лежать масса m_3 третьего груза, чтобы система находилась в равновесии? Блоки и нити считать невесомыми, трением в блоках пренебречь. Участки нитей, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны.

Решение. Обозначим силы натяжения нитей через T_0, T_1, T_2, T_{13} и T_{23} (см. рисунок). Запишем условия равновесия груза 3:

$$m_3 g = T_{13} + T_{23},$$

грузов 1 и 2:

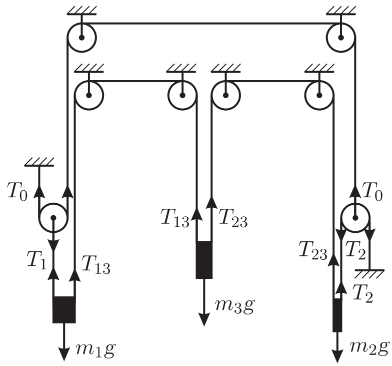
$$m_1 g = T_1 + T_{13}, \quad m_2 g = T_2 + T_{23},$$

а также подвижных блоков:

$$2T_0 = T_1, \quad T_0 = 2T_2.$$

Используя условия равновесия грузов 1 и 2 и блоков, можно выразить все силы натяжения через величину T_0:

$$T_{13} = m_1 g - 2T_0, \quad T_{23} = m_2 g - \frac{1}{2}T_0.$$



Пользуясь условием равновесия груза 3, получаем:

$$m_3 g = (m_1 + m_2)g - \frac{5}{2}T_0, \quad \text{и} \quad T_0 = \frac{2}{5}(m_1 + m_2 - m_3)g.$$

Отсюда

$$T_{13} = \frac{1}{5}(m_1 - 4m_2 + 4m_3)g \quad \text{и} \quad T_{23} = \frac{1}{5}(-m_1 + 4m_2 + m_3)g.$$

Поскольку силы натяжения нитей не могут быть отрицательными, запишем дополнительные условия: $T_0 \geqslant 0$, $T_{13} \geqslant 0$, $T_{23} \geqslant 0$. Отсюда

$$m_1 + m_2 \geqslant m_3, \quad m_1 + 4m_3 \geqslant 4m_2, \quad 4m_2 + m_3 \geqslant m_1.$$

Подставляя численные значения, находим интервал, в котором должна лежать масса m_3 третьего груза для того, чтобы система находилась в равновесии: 5 кг $\leqslant m_3 \leqslant$ 10 кг.

3. В простейшей модели нейтронной звезды предполагается, что давление p нейтронного газа, являющегося веществом звезды, является степенной функцией его плотности ρ и практически не зависит от температуры: $p = A\rho^{5/3}$, где $A = 0{,}54 \cdot 10^4$ Н $\cdot$ м^3/кг$^{5/3}$. Оцените в данной модели размер нейтронной звезды (радиус R сферы, внутри которой сосредоточена половина массы звезды) с массой порядка массы Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

Решение. Рассмотрим сферу радиусом R, внутри которой сосредоточена половина массы звезды. На лежащий над поверхностью этой сферы столб нейтронного газа с малой площадью основания ΔS и массой $\Delta m = \dfrac{M/2}{4\pi R^2}\Delta S$ действуют уравновешивающие друг друга сила тяжести

$$F_{\text{т}} = \frac{G(M/2)\Delta m}{R^2} = \frac{G(M/2)}{R^2} \cdot \frac{M/2}{4\pi R^2}\Delta S$$

и сила давления $F_{\text{д}} = p \cdot \Delta S = A\rho^{5/3} \cdot \Delta S$. Следовательно,

$$\frac{G\,(M/2)^2}{4\pi R^4} = A\rho^{5/3}.$$

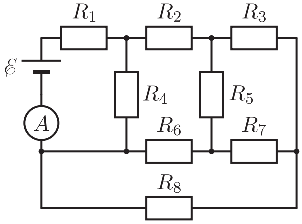
Плотность нейтронного газа у поверхности сферы радиусом R можно приближённо оценить как среднюю плотность вещества внутри этой сферы: $\rho \approx \dfrac{M/2}{(4/3)\pi R^3}$.

Из двух последних уравнений находим:

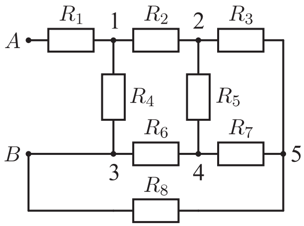
$$R \approx \frac{A}{G\,(M/2)^{1/3}}\left(\frac{9\sqrt{3}}{4\pi}\right)^{2/3} \approx \frac{A}{G\,(M/2)^{1/3}} \approx 0{,}9 \cdot 10^4 \text{ м} \approx 10 \text{ км}.$$

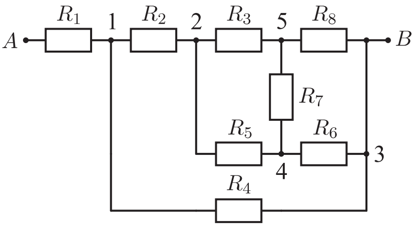
Заметим, что средний радиус Солнца составляет $\sim 7 \cdot 10^5$ км, то есть нейтронная звезда с массой порядка массы Солнца меньше него по размеру примерно в 100000 раз!

4. Сопротивления всех резисторов в электрической цепи, изображённой на рисунке, одинаковы и равны $R = 300$ Ом. Включённый в цепь амперметр показывает величину силы тока $I = 10$ мА. Найдите ЭДС $\mathscr{E}$ батарейки. Сопротивлениями амперметра и батарейки можно пренебречь.



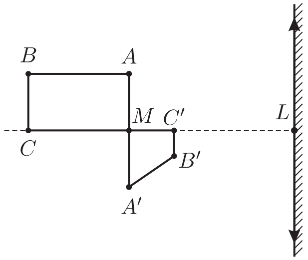
Решение. Найдём сопротивление электрической цепи между точками A и B (см. рис. слева). Для этого перерисуем схему цепи, как показано на рис. справа (цифрами на схеме обозначены соответствующие друг другу узлы).



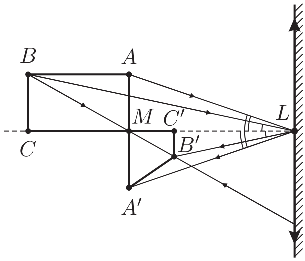


Из симметрии участка схемы, содержащего резисторы R_3, R_5, R_6, R_7 и R_8 следует, что сила тока, текущего через резистор R_7, равна нулю. Поэтому при удалении этого резистора из цепи силы токов через остальные резисторы и общее сопротивление цепи не изменятся. Сопротивление цепи после удаления этого резистора определяется из законов последовательного и параллельного сопротивления проводников; оно равно $R_{AB} = \dfrac{5}{3}R$. Следовательно, $\mathscr{E} = IR_{AB} = \dfrac{5}{3}IR = 5$ В.

5. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием F приложена вплотную к плоскому зеркалу. Изображением прямоугольника $MABC$ (точки M и C лежат на главной оптической оси ML линзы) в этой оптической системе является трапеция $MA'B'C'$ с основаниями MA' и $C'B'$ (см. рисунок). Вершины трапеции M, A', B' и C' являются, соответственно, изображениями вершин M, A, B и C прямоугольника. Найдите расстояние от точки M до линзы, а также длины оснований и высоту $C'M$ трапеции $MA'B'C'$. Длины сторон прямоугольника $AB = a$ и $MA = b$. Известно, что $a \ll F$ и $b \ll F$.



Решение. Луч BM после отражения от оптической системы должен, по условию, вновь пройти через точку M. Это возможно только в том случае, если после преломления в линзе он идёт перпендикулярно зеркалу. Следовательно, точка M является фокусом линзы, а расстояние от неё до центра линзы L равно $ML = F$. Отсюда также вытекает, что точка B' лежит на прямой BM (см. рисунок).



Пучок света, исходящий из точки A, которая лежит в фокальной плоскости, преобразуется линзой в параллельный пучок. После отражения от зеркала этот пучок остаётся параллельным, а после второго преломления в линзе он преобразуется в пучок, вновь сходящийся в фокальной плоскости. Следовательно, точка A' также лежит в фокальной плоскости. Поскольку луч AL линзой не преломляется, то $\angle ALM = \angle A'LM$, и $MA' = MA = b$.

Из подобия треугольников MCB и $MC'B'$ имеем: $C'B' = C'M \cdot \dfrac{b}{a}$. Учтём, что $\angle BLM = \angle B'LM$; отсюда $\dfrac{CB}{CL} = \dfrac{C'B'}{C'L}$, или $\dfrac{b}{F+a} = \dfrac{C'M}{F - C'M} \cdot \dfrac{b}{a}$. Таким образом, $C'M = \dfrac{aF}{F+2a}$, и $C'B' = \dfrac{bF}{F+2a}$.

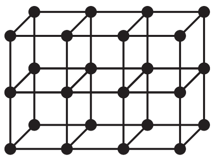
Городской этап 2007/2008 уч. года. 1-й тур

Состоялся 10 февраля 2008 года.

7 класс

На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

1. Строение кристалла некоторого металла схематически показано на рисунке. Атомы находятся в вершинах кубиков и образуют кубическую кристаллическую решётку. Известно, что плотность этого металла равна $\rho = 7900$ кг/м^3, а масса одного атома $m_0 = 9{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг. Найдите объём V_0 одного кубика — элементарной ячейки данной кристаллической решётки.



Решение. Проведём плоскости перпендикулярно серединам рёбер кубиков. В результате кристалл окажется разделённым на кубики, в каждом из которых находится по одному атому.

Пусть кристалл имеет объём V и содержит N атомов. Тогда плотность металла

$$\rho = \frac{Nm_0}{V} = \frac{m_0}{V/N} = \frac{m_0}{V_0},$$

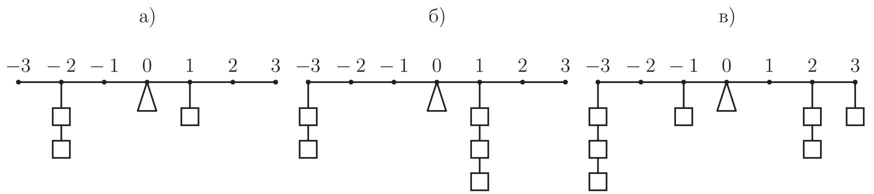
где $V_0 = V/N$ — объём, приходящийся на один атом, то есть искомый объём элементарной ячейки кристаллической решётки. Отсюда $V_0 = m_0/\rho \approx 1{,}18 \cdot 10^{-29}$ м^3.

2. Ученик измерил плотность деревянного бруска, покрытого краской, и она оказалась равной $\rho = 600$ кг/м^3. Но на самом деле брусок состоит из двух частей, равных по массе, плотность одной из которых в два раза больше плотности другой. Найдите плотности обеих частей бруска. Массой краски можно пренебречь.

Решение. Пусть m — масса каждой из частей бруска, ρ_1 и $\rho_2 = \rho_1/2$ — их плотности. Тогда части бруска имеют объёмы m/ρ_1 и $2m/\rho_1$, а весь брусок массу $2m$ и объём $3m/\rho_1$. Средняя плотность бруска $\rho = \dfrac{2m}{3m/\rho_1} = \dfrac{2\rho_1}{3}$.

Отсюда находим плотности частей бруска: $\rho_1 = 3\rho/2 = 900$ кг/м^3, $\rho_2 = 3\rho/4 = 450$ кг/м^3.

3. На рисунке изображены рычаги, на которых имеются крючки, прикреплённые через одинаковые расстояния. Крючки пронумерованы от -3 до 3, причём 0 приходится на середину рычага. К некоторым крючкам прикреплено по нескольку грузов одинаковой массы. Имеется ещё один такой же не подвешенный груз. К крючку с каким номером n его нужно подвесить, чтобы рычаг находился в равновесии? Решите задачу для каждого из трёх случаев, представленных на рисунке.



Решение. Обозначим через m массу одного груза, l — расстояние между соседними крючками. Применим для каждого из случаев правило рычага:

(а) $m \cdot l - 2m \cdot 2l + m \cdot nl = 0$, отсюда $n = 3$;

(б) $3m \cdot l - 2m \cdot 3l + m \cdot nl = 0$, отсюда $n = 3$;

(в) $2m \cdot 2l + m \cdot 3l - m \cdot l - 3m \cdot 3l + m \cdot nl = 0$, отсюда $n = 3$.

4. К потолку над горизонтальным столом подвешена пружина. Если к её концу прикрепить груз и дождаться установления равновесия, груз окажется на столе в случае, если его масса m превосходит значение $m_0 = 400$ г. С какой силой F груз массой $m > m_0$ будет давить на стол? Размерами груза по сравнению с растяжением пружины можно пренебречь. Отношение действующей на груз силы тяжести к массе груза (эта величина называется ускорением свободного падения) $g = 10$ Н/кг $= 10$ м/с^2. Решите задачу в общем случае и при $m = 1$ кг.

Решение. Как следует из условия, при $m = m_0$ груз в равновесии только коснулся стола, не оказывая на него давления. Следовательно, действующая на груз сила тяжести $m_0 g$ уравновешивается силой упругости пружины. При дальнейшем увеличении массы груза сила упругости пружины не меняется, а сила тяжести становится равной mg. Следовательно, груз давит на поверхность стола с силой $F = (m - m_0)g = 6$ Н.

5. Поплавок для рыболовной удочки имеет объём $V = 5$ см^3 и массу $m = 2$ г. К поплавку на леске прикреплено свинцовое грузило, и при этом поплавок плавает, погрузившись на половину своего объёма. Найдите массу грузила M. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность свинца $\rho_с = 11300$ кг/м^3.

Решение. На систему, состоящую из поплавка и грузила, действуют направленные вниз силы тяжести mg (приложена к поплавку) и Mg (приложена к грузилу), а также направленные вверх силы Архимеда $\rho_в gV/2$ (приложена к поплавку) и $\rho_в Mg/\rho_с$ (приложена к грузилу). В равновесии сумма сил, действующих на систему, равна нулю:

$$(m + M)g = \frac{\rho_в gV}{2} + \frac{\rho_в Mg}{\rho_с}.$$

Отсюда

$$M = \frac{\dfrac{\rho_в V}{2} - m}{1 - \dfrac{\rho_в}{\rho_с}} = \frac{1000\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}}{1 - \dfrac{1000}{11300}} \approx 0{,}55\ \text{г}.$$

8 класс

На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

1. Два экскурсионных автобуса со школьниками должны были отправиться из Москвы в Санкт – Петербург, но один из автобусов задержался с отправлением. Когда задержавшийся автобус выехал, первый автобус находился на расстоянии $S = 20$ км от места отправления. За время, за которое задержавшийся автобус проехал $S = 20$ км, первый автобус проехал $S_1 = 16$ км. На прохождение расстояния $\Delta s = 1$ км второй автобус затрачивает на $\Delta t = 12$ с меньше, чем первый. На каком расстоянии L от места отправления второй автобус догонит первый? Чему равны скорости автобусов v_1 и v_2? Считайте, что пробок на дороге нет, и скорости автобусов не меняются.

Решение. За одно и то же время первый и второй автобусы проехали расстояния S_1 и S; следовательно, отношение их скоростей $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{S_1}{S} = 0{,}8$. Перейдём к ответам на вопросы задачи.

Когда второй автобус пройдёт расстояние L, первый пройдёт расстояние, равное $L - S$, то есть $\dfrac{L}{v_2} = \dfrac{L - S}{v_1}$. С учётом найденного выше отношения скоростей получаем:

$$L = \frac{S}{1-(v_1/v_2)} = \frac{S^2}{S-S_1} = 100 \text{ км}.$$

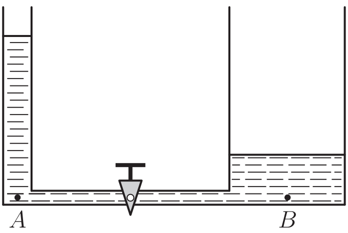
По условию,

$$\Delta t = \Delta s\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = \frac{\Delta s}{v_1}\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right) = \frac{\Delta s}{v_1}\left(1 - \frac{S_1}{S}\right).$$

Отсюда

$$v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t}\left(1 - \frac{S_1}{S}\right) = 60 \ \frac{\text{км}}{\text{ч}}, \quad v_2 = v_1\frac{S}{S_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\left(\frac{S}{S_1} - 1\right) = 75 \ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

2. В сосуды, соединённые трубкой с краном, налита вода (см. рисунок). Гидростатическое давление в точках A и B равно $p_A = 4$ кПа и $p_B = 1$ кПа соответственно, площади поперечного сечения левого и правого сосудов составляют $S_A = 3$ дм^2 и $S_B = 6$ дм^2 соответственно. Какое гидростатическое давление установится в точках A и B, если открыть кран?



Решение. До открытия крана масса воды в левом сосуде равна p_AS_A/g, в правом сосуде p_BS_B/g. После открытия крана в точках A и B устанавливается одинаковое гидростатическое давление p, поэтому суммарная масса воды в сосудах равна $p(S_A+S_B)/g$. Поскольку масса воды сохраняется, то $p_AS_A + p_BS_B = p(S_A+S_B)$. Таким образом,

$$p = \frac{p_AS_A + p_BS_B}{S_A+S_B} = 2 \text{ кПа}.$$

3. Парафиновая свечка горит так, что её длина уменьшается со скоростью $u = 5\cdot10^{-5}$ м/с, а испаряющийся парафин полностью сгорает, не стекая вниз. Свечка плавает в широком сосуде с водой. Её слегка поддерживают в вертикальном положении, чтобы она не опрокидывалась. С какой скоростью v свечка движется относительно сосуда во время сгорания? Плотность воды $\rho_\text{в} = 1000$ кг/м^3, плотность парафина $\rho_\text{п} = 900$ кг/м^3.

Решение. Пусть L — длина свечки в некоторый момент времени, H — длина её подводной части, S — площадь её поперечного сечения. Согласно условию плавания тел, $\rho_{\text{в}} gHS = \rho_{\text{п}} gLS$, откуда $H/L = \rho_{\text{п}}/\rho_{\text{в}}$. За время Δt длина свечки уменьшилась на величину $\Delta L = u\Delta t$, а глубина погружения её нижнего конца уменьшилась на

$$\Delta H = \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{в}}}\Delta L = \frac{u\Delta t \rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

Следовательно, нижний конец свечки (как и вся свечка) движется со скоростью

$$v = \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{u\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{в}}} = 0{,}9u = 4{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$$

относительно сосуда.

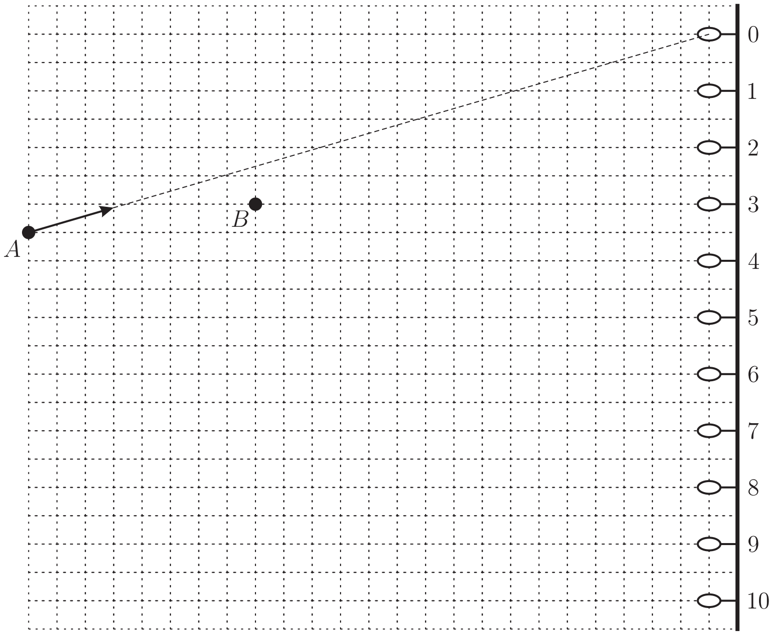
4. Школьник Вася проводит дома физический эксперимент, а его младший брат Петя пытается ему помогать. Вася налил в банку $V = 1$ л воды при температуре $t_1 = 20$ °C, поместил в воду кипятильник мощностью $P = 1$ кВт, включил его и вышел в соседнюю комнату поговорить по телефону с одноклассником. Вернувшись через $\tau = 5$ мин, он измерил температуру воды в банке, и оказалось, что она равна $t_2 = 60$ °C. Выяснилось, что Петя на некоторое время отключал кипятильник, пока Вася разговаривал по телефону. Сколько времени длилась Петина «помощь»? Удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · °C), плотность воды $\rho = 1$ кг/л. Теплоемкостями банки и кипятильника, а также потерями теплоты пренебречь.

Решение. На нагревание воды от 20 °C до 60 °C должно уйти время $\tau_0 = \dfrac{c\rho V(t_2 - t_1)}{P} = 168$ с. Следовательно, Петина «помощь» длилась в течение промежутка времени $\Delta t = \tau - \tau_0 = \tau - \dfrac{c\rho V(t_2 - t_1)}{P} = 132$ с.

9 класс

На выполнение задания отводилось 4 астрономических часа.

1. К вертикальной стенке через равные интервалы прикреплены баскетбольные кольца, пронумерованные от 0 до 10. Стремясь попасть в одно из колец, школьник бросил мяч из точки A точно по направлению к кольцу с номером 0 (см. рисунок). В некоторый момент полёта мяч находился в точке B. В какое из баскетбольных колец он попадёт? Влиянием воздуха пренебречь.



Решение. Введём систему координат, выбрав в качестве начала координат точку A и направив ось x по горизонтали к стенке, перпендикулярно ей, а ось y — вертикально вверх. В поле силы тяжести мяч движется по параболе, уравнение которой в данной системе координат имеет вид $y = kx - bx^2$, где k и b — некоторые положительные коэффициенты.

Можно считать, что вблизи точки бросания мяч движется прямолинейно ($y \approx kx$) по направлению к кольцу с номером 0. Из рисунка определяем, что $k = \dfrac{7}{24}$. Найдём теперь коэффициент b. Обозначим через L расстояние между двумя соседними кольцами; тогда точка B имеет координаты $(4L; L/2)$. Тогда для точки B имеем:

$$\frac{L}{2} = \frac{7}{24} \cdot 4L - b \cdot (4L)^2, \quad \text{откуда} \quad b = \frac{1}{24L}.$$

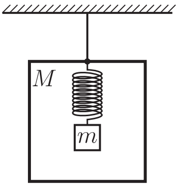
Вертикальная прямая, на которой расположены центры колец, имеет координату $x = 12L$. Мяч пересечёт её в точке с координатой

$$y = \frac{7}{24} \cdot 12L - \frac{1}{24L} \cdot (12L)^2 = -2{,}5L,$$

то есть попадёт в баскетбольное кольцо номер 6.

Задачу можно пытаться решать, исходя из того, что тело, свободно падающее без начальной скорости, за последовательные равные промежутки времени проходит расстояния, относящиеся друг к другу, как $1 : 3 : 5 : \ldots$ В данной задаче эти расстояния нужно отсчитывать от пунктирной прямой на рисунке, вдоль которой двигалось бы тело в отсутствие силы тяжести. Однако масштаб рисунка не позволяет достаточно точно определить, на каком расстоянии от точки B находится эта прямая, что снижает точность дальнейших вычислений. Поэтому при таком способе решения может получиться, что мяч попадёт между 6-м и 7-м кольцами.

2. Коробка массой M подвешена на нитке к потолку комнаты (см. рисунок). Внутри коробки на лёгкой пружине подвешен груз массой m. Нитку пережигают. Найдите ускорения груза и коробки сразу после пережигания нити. Ускорение свободного падения равно g.



Решение. До пережигания нити на груз массой m действовали направленная вниз сила тяжести mg и равная ей по величине и противоположная по направлению сила упругости пружины F. На коробку действовали направленная вниз сила упругости пружины F и сила тяжести Mg, а также направленная вверх сила натяжения нити $T = F + Mg$.

Сразу после пережигания нити сила её натяжения обратится в ноль, а остальные силы, действующие на груз и коробку, останутся прежними. По этой причине ускорение груза сразу после пережигания нити будет равно нулю. На коробку же будут действовать только силы тяжести и упругости, поэтому ускорение коробки будет равно

$$a = \frac{F + Mg}{M} = \frac{m + M}{M} g.$$

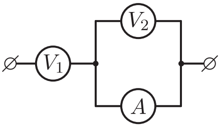
3. На станции глубокого заложения в Московском метрополитене длина эскалатора равна $L = 100$ м, угол его наклона к горизонту равен $\alpha = 22{,}5°$, а скорость движения составляет $v = 1{,}2$ м/с. Какова должна быть минимальная мощность электромотора, приводящего в движение эскалатор, чтобы в «час пик», когда эскалатор плотно заполнен людьми, этот мотор мог справиться с нагрузкой при движении вверх? Считать, что люди в среднем имеют массу $m = 70$ кг и располагаются в два ряда на среднем расстоянии друг от друга (по горизонтали) $l = 50$ см, а КПД механической части эскалатора равен $\eta = 0{,}7$.

Решение. Всего на эскалаторе в «час пик» помещается число людей $n = 2\dfrac{L\cos\alpha}{l}$ общей массой $M = nm$ и весом $P = nmg$. Эскалатор должен двигать людей с вертикальной скоростью $u = v\sin\alpha$. Таким образом, полезная механическая мощность эскалатора равна $N = Pu$, а минимальная мощность электромотора с учётом КПД механической части эскалатора равна

$$N_{\text{мин}} = \frac{N}{\eta} = \frac{Pu}{\eta} = \frac{nmgv\sin\alpha}{\eta} = \frac{2Lmgv\cos\alpha\,\sin\alpha}{l\eta} = \frac{mgLv\sin 2\alpha}{l\eta} \approx$$

$$\approx \frac{70\text{ кг}\cdot 10\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 100\text{ м}\cdot 1{,}2\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 0{,}7}{0{,}5\text{ м}\cdot 0{,}7} \approx 170\text{ кВт}.$$

4. Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, подключена к батарейке. Вольтметры V_1 и V_2 показывают напряжения $U_1 = 1$ В и $U_2 = 0{,}1$ В, а амперметр A показывает силу тока $I = 1$ мА. Найдите сопротивления приборов. Вольтметры считайте одинаковыми.



Решение. Сопротивление амперметра R_A равно отношению напряжения U_2 на нём к силе тока I, текущего через амперметр:

$$R_A = \frac{U_2}{I} = 0{,}1\text{ кОм}.$$

Обозначим через R_V сопротивления вольтметров. Через вольтметр V_1 течёт ток силой U_1/R_V, который разветвляется на текущий через вольтметр V_2 ток силой U_2/R_V и ток силой I, текущий через амперметр:

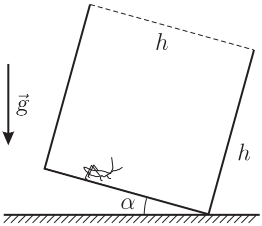
$$\frac{U_1}{R_V} = \frac{U_2}{R_V} + I.$$

Отсюда $R_V = \dfrac{U_1 - U_2}{I} = 0{,}9$ кОм.

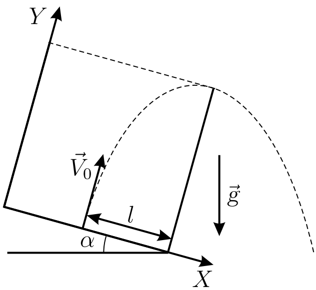
10 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

1. В открытой прямоугольной коробке сидит кузнечик, который умеет прыгать с начальной скоростью $V_0 = 3$ м/с под любым углом к горизонту. На какой минимальный угол к горизонту нужно наклонить коробку, чтобы кузнечик смог из неё выпрыгнуть? Считать, что каждая грань коробки является квадратом со стороной $h = 52$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение. Выберем координатные оси X и Y, как показано на рисунке. Тогда в момент $t_п$ преодоления кузнечиком края коробки проекция его скорости на ось Y должна быть равна нулю, а координата $y = h$, и можно записать следующие соотношения:



$$V_{oy} + a_y t_п = 0; \quad V_{0y} t_п + \frac{a_y t_п^2}{2} = h,$$

где $a_y = -g\cos\alpha$ и V_{0y} — проекции векторов ускорения и начальной скорости кузнечика на ось Y. Отсюда $h = \dfrac{V_{0y}^2}{2g\cos\alpha}$.

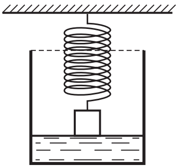
При фиксированных значениях угла α и начальной скорости V_0 максимальная высота подъёма над дном коробки достигается при $V_0 y = V_0$, то есть кузнечику следует прыгать перпендикулярно дну коробки. При этом

$$\cos\alpha = \frac{V_0^2}{2gh} \approx 0{,}87, \quad \alpha = \arccos\frac{V_0^2}{2gh} \approx 30^\circ.$$

Вдоль оси X кузнечик за время $t_п$ сместится на расстояние $l = a_x t_n^2/2$, где $a_x = g\sin\alpha$. Отсюда $l = \dfrac{V_0^2\sin\alpha}{2g\cos^2\alpha} \approx 30$ см.

Таким образом, размеры дна коробки достаточно велики для того, чтобы кузнечик мог «стартовать» на нужном удалении от стенки.

2. Железный кубик со стороной a подвешен на пружине жёсткостью k. В начальный момент кубик касается нижней горизонтальной гранью поверхности воды в сосуде. В сосуд начинают медленно доливать воду так, что её уровень поднимается со скоростью V_1. С какой скоростью V_2 относительно сосуда будет при этом двигаться кубик? Плотность воды равна ρ, ускорение свободного падения равно g.



Решение. При медленном повышении уровня воды в сосуде можно считать, что в любой момент времени кубик находится в равновесии. Учитывая, что на кубик действуют силы тяжести $m\vec{g}$, упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ и Архимеда $\vec{F}_{\text{А}}$, запишем условие равновесия кубика:

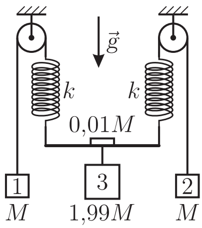
$$F_{\text{упр}} + F_{\text{А}} = mg.$$

За время Δt пружина станет короче на $V_2\Delta t$, а объём погруженной в воду части кубика увеличится на $(V_1 - V_2)\Delta t a^2$. Поэтому сила упругости изменится на $\Delta F_{\text{упр}} = -kV_2\Delta t$, а сила Архимеда — на $\Delta F_{\text{А}} = (V_1 - V_2)\Delta t a^2 \rho g$. Учитывая, что $\Delta F_{\text{упр}} + \Delta F_{\text{А}} = 0$, получим после преобразований

$$V_2 = V_1 \frac{\rho g a^2}{\rho g a^2 + k}.$$

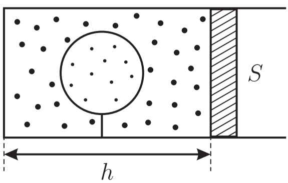
С такой скоростью кубик будет «всплывать», пока он целиком не окажется под водой, то есть при $t \leqslant \dfrac{a}{V_1 - V_2} = \dfrac{a}{V_1}\left(1 + \dfrac{\rho g a^2}{k}\right)$. При дальнейшем заполнении сосуда водой скорость кубика будет равна нулю.

3. Лёгкая доска подвешена за края на двух пружинах жёсткостью k, к другим концам которых прикреплены нерастяжимые нити, перекинутые через неподвижные блоки и соединённые с грузами 1 и 2 массой M каждый (см. рисунок). На середине доски лежит шайба массой $0{,}01M$; к доске снизу под шайбой подвешен груз 3 массой $1{,}99M$. В некоторый момент времени нить, связывающая доску и груз 3, обрывается. На какую максимальную высоту относительно своего первоначального положения подскочит шайба? Нити, блоки и пружины считать невесомыми, трение отсутствует, ускорение свободного падения равно g.



Решение. В положении равновесия удлинения пружин равны Mg/k. После обрыва нити, на которой висит груз 3, ускорения грузов 1 и 2 оказываются примерно в 200 раз меньше ускорения доски с шайбой. Поэтому будем считать грузы 1 и 2 неподвижными в течение времени разгона шайбы. С такой же точностью можно в течение этого времени пренебречь силой тяжести, действующей на шайбу, по сравнению с силой упругости пружин. В рамках такой модели шайба с лёгкой доской движутся только под действием силы упругости двух пружин; максимальную высоту h подъёма шайбы можно оценить с помощью закона сохранения механической энергии: потенциальная энергия пружин $U = 2 \cdot k \cdot \dfrac{(Mg/k)^2}{2}$ переходит в потенциальную энергию шайбы $W = 0{,}01Mgh$. Отсюда $h \approx 100\dfrac{Mg}{k}$.

4. Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд с теплопроводящими стенками, заполненный аргоном плотностью $\rho = 1{,}7$ кг/м^3, закрыт подвижным поршнем и находится в комнате. Площадь поршня равна $S = 400$ см^2, расстояние от левого края цилиндра до поршня равно $h = 50$ см (см. рисунок). В сосуде ко дну на нити прикреплён шар объёмом $V_ш = 1000$ см^3, сделанный из тонкого нерастяжимого и теплопроводящего материала и заполненный гелием; масса шара с гелием равна $m = 1{,}2$ г. После того, как протопили печь, и воздух в комнате прогрелся, поршень переместился вправо на расстояние $\Delta h = 3$ см. Найдите изменение ΔN силы натяжения нити, удерживающей шар. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Решение. При передвижении поршня объём аргона изменился со значения $V = Sh - V_ш$ до значения $V + S\Delta h$, увеличившись в $\dfrac{V + S\Delta h}{V}$ раз. В такое же количество раз уменьшилась плотность аргона — в конце процесса она равна $\rho\dfrac{V}{V + S\Delta h}$. Следовательно, выталкивающая сила, действующая на шар, уменьшилась на величину

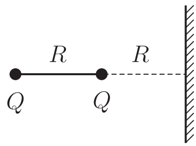
$$\Delta F = \left(\rho - \rho\frac{V}{V + S\Delta h}\right) gV_ш = \rho\frac{S\Delta h}{V + S\Delta h}gV_ш = \rho\frac{S\Delta h}{S(h + \Delta h) - V_ш}gV_ш.$$

На такую же величину уменьшилась и сила натяжения нити, удерживающей шар. Поэтому изменение этой силы равно

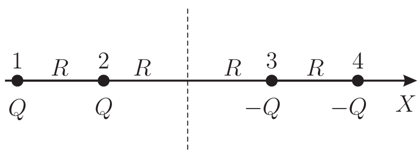
$$\Delta N = -\rho \frac{S\Delta h}{S(h+\Delta h) - V_{\text{ш}}} g V_{\text{ш}} \approx -1{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ Н},$$

если только оно не превышает по величине начальной силы натяжения нити, то есть если шар в конце нагревания не ляжет на дно цилиндра. Проверим это: вначале сила натяжения нити N была равна разности силы Архимеда и веса шара с гелием: $N = (\rho V_{\text{ш}} - m)g = 5 \cdot 10^{-3}$ Н $> |\Delta N|$. Значит, нить в конце останется натянутой, и наш ответ справедлив.

5. Непроводящий стержень длиной R имеет два одинаковых точечных заряда Q на своих концах и расположен перпендикулярно проводящей незаряженной плоскости большого размера (см. рисунок). Расстояние от плоскости до ближайшего к ней конца стержня также равно R. Определить силу F, действующую на стержень с зарядами со стороны плоскости.



Решение. Создаваемое в рассматриваемой системе электрическое поле слева от проводящей плоскости будет, согласно методу электростатических изображений, таким же, как и в системе зарядов, показанной на рисунке (заряд 4 является изображением заряда 1, а заряд 3 — изображением заряда 2).



Направим ось X вдоль стержня к плоскости. Тогда все силы взаимодействия зарядов будут направлены вдоль этой оси, и со стороны электрического поля на заряды 1 и 2 действуют силы с проекциями на ось X, равными

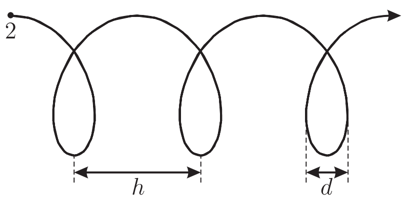
$$F_{1x} = -\frac{kQ^2}{R^2} + \frac{kQ^2}{(3R)^2} + \frac{kQ^2}{(4R)^2} \quad \text{и} \quad F_{2x} = \frac{kQ^2}{R^2} + \frac{kQ^2}{(2R)^2} + \frac{kQ^2}{(3R)^2},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ — электрическая постоянная. Складывая эти силы, находим суммарную силу, действующую на стержень с зарядами со стороны плоскости:

$$F = F_{1x} + F_{2x} = \frac{kQ^2}{R^2}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = \frac{77kQ^2}{144R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{77Q^2}{144R^2}.$$

11 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.



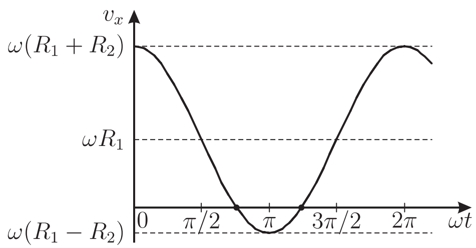
1. Две материальные точки 1 и 2 массами m_1 и m_2 находятся на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости и связаны невесомой нерастяжимой нитью длиной L. Вначале точка 1 закреплена, а точка 2 движется вокруг неё по окружности. Затем точку 1 освобождают, и точка 2 начинает двигаться по траектории, изображённой на рисунке. Найдите шаг траектории h и ширину петли d.

Решение. Обозначим через ω угловую скорость вращения точки 2 вокруг точки 1 до момента её освобождения. Введём неподвижную систему отсчёта, выбрав в качестве начала отсчёта времени момент, когда освобождают точку 1, а в качестве начала координат O — начальное положение центра масс системы, находящегося на расстоянии $R_1 = \dfrac{m_2 L}{m_1 + m_2}$ от точки 1 и $R_2 = \dfrac{m_1 L}{m_1 + m_2}$ от точки 2. Направим ось x вдоль начальной скорости точки 2, а ось y — вдоль нити от точки 1 к точке 2. В неподвижной системе отсчёта начальная скорость точки 1 равна нулю, а начальная скорость точки 2 равна ωL и направлена по оси x. Введём также движущуюся систему отсчёта, координатные оси которой x'и y' направлены одинаково с координатными осями x и y, а начало координат O' в момент $t = 0$ совпадает с точкой O и движется относительно неё со скоростью $\dfrac{\omega m_2 L}{m_1 + m_2}$ вдоль оси x. В такой движущейся системе отсчёта центр масс системы (точка O') неподвижен, поэтому точки 1 и 2 движутся вокруг него по окружностям радиусами R_1 и R_2 соответственно. В начальный момент времени скорости точек 1 и 2 направлены вдоль оси x и равны $v_1 = -\dfrac{\omega m_2 L}{m_1 + m_2} = -\omega R_1$ и $v_2 = \dfrac{\omega m_1 L}{m_1 + m_2} = \omega R_2$ соответственно, поэтому вращение точек 1 и 2 вокруг точки O' происходит также с угловой скоростью ω. Точка 2 при этом движется по закону $x' = R_2 \sin \omega t$, $y' = R_2 \cos \omega t$.

Перейдём обратно в неподвижную систему отсчёта. Закон движения точки 2 здесь будет выглядеть следующим образом: $x = R_2 \sin\omega t + \omega R_1 t$, $y = R_2 \cos\omega t$. За время $\Delta t = 2\pi/\omega$, то есть за период обращения точки 2 вокруг центра масс системы эта точка смещается по оси x на расстояние, равное шагу траектории: $\Delta x = h = 2\pi R_1 = \dfrac{2\pi m_2 L}{m_1 + m_2}$.

Чтобы найти ширину петли d, исследуем знак компоненты v_x скорости точки 2:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega(R_1 + R_2 \cos\omega t).$$



Видно (см. рисунок), что v_x меняет знак при $R_2 > R_1$, то есть при $m_1 > m_2$. На протяжении первого периода обращения точки 2 вокруг центра масс системы компонента скорости v_x дважды обращается в ноль — при $\omega t_1 = \pi - \arccos\dfrac{R_1}{R_2}$ и при $\omega t_2 = \pi + \arccos\dfrac{R_1}{R_2}$. В промежутке времени между t_1 и t_2 компонента скорости v_x отрицательна. За это время точка 2 смещается по оси x на расстояние, равное

$$x(t_2) - x(t_1) = -d = R_1 \cdot 2\varphi - 2R_2 \sin\varphi = \frac{2m_2 L}{m_1 + m_2}\varphi - \frac{2m_1 L}{m_1 + m_2}\sin\varphi,$$

где $\varphi = \arccos\dfrac{R_1}{R_2} = \arccos\dfrac{m_2}{m_1}$. Таким образом, ширина петли равна

$$d = \frac{2L}{m_1 + m_2}(m_1 \sin\varphi - m_2\varphi) = \frac{2L}{m_1 + m_2}\left(\sqrt{m_1^2 - m_2^2} - m_2 \arccos\frac{m_2}{m_1}\right).$$

2. Явление застоя заключается в том, что максимальная сила трения покоя при контакте двух тел немного больше, чем сила трения скольжения. Для изучения этого явления провели следующий опыт. К лежащему на горизонтальном столе бруску массой m прикрепили пружину жёсткостью k. Свободный конец пружины начали прямолинейно, равномерно и очень медленно перемещать, удаляя его от бруска. В этом опыте брусок двигался скачками, перемещаясь на протяжении одного скачка всё время в одном направлении на расстояние s. Найдите максимальную силу трения покоя F между столом и бруском. Коэффициент трения скольжения бруска о стол μ не зависит от скорости. Ускорение свободного падения равно g.

Решение. При медленном растяжении пружины брусок начнёт двигаться, когда удлинение пружины станет равным $x_0 = F/k$. Рассматривая процесс движения бруска, можно считать, что во время «скачка» перемещаемый конец пружины неподвижен (его скорость по условию очень мала). Направим ось X в сторону перемещения конца пружины, за начало координат примем начальное положение бруска и запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось:

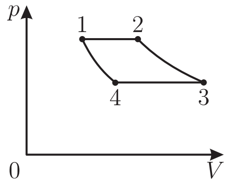
$$ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = k(x_0 - x) - \mu mg = -k\left(x - \frac{F - \mu mg}{k}\right).$$

Это — уравнение гармонических колебаний; оно справедливо для движения бруска от начала его смещения до первой остановки. Двигаясь вправо, брусок совершит полпериода колебания, пройдя из начала координат через положение равновесия с координатой $x_{\text{р}} = (F - \mu mg)/k$ в точку с вдвое большей координатой $s = 2x_{\text{р}} = 2(F - \mu mg)/k$. Отсюда $F = \mu mg + \dfrac{ks}{2}$.

Задачу можно решить и энергетическим способом. Пусть к моменту начала скольжения бруска пружина растянута на величину x. Тогда к моменту остановки бруска (сразу после окончания «скачка») растяжение пружины составляет $x - s$, и закон изменения механической энергии бруска можно записать в следующем виде: $\dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{k(x-s)^2}{2} + \mu mgs$. Отсюда $x = \dfrac{\mu mg}{k} + \dfrac{s}{2}$, и для максимальной силы трения покоя получаем: $F = kx = \mu mg + \dfrac{ks}{2}$.

3. Цикл тепловой машины состоит из двух изобар и двух изотерм, при этом работа при изобарическом расширении такая же, как и при изотермическом. Найдите КПД такого цикла, если рабочим веществом является гелий, а максимальная температура в процессе вдвое больше минимальной.

Решение. Изобразим цикл тепловой машины на термодинамической диаграмме в pV-координатах (см. рисунок): 1–2 и 3–4 — изобары, 2–3 и 4–1 — изотермы. КПД цикла равен отношению совершённой в цикле работы к полученному на участке 1–2–3 количеству теплоты.



Рассчитаем работу на различных участках цикла. Обозначим работу на участке 1–2 через $A_{12} = A$; тогда по условию для участка 2–3 имеем $A_{23} = A$. Для расчёта работы на участке 3–4 учтём, что в силу условия задачи $T_2 = T_3 = T_{\max}$, $T_1 = T_4 = T_{\min}$, $T_3 = 2T_4$, $p_1 = p_2$, $p_3 = p_4$. Поэтому $V_3 = (T_3/T_4)V_4 = 2V_4$, $V_2 = (T_2/T_1)V_1 = 2V_1$, $p_1V_1 = p_4V_4$; отсюда

$$A_{34} = -p_4(V_3 - V_4) = -p_4V_4 = -p_1V_1 = -p_1(V_2 - V_1) = -A.$$

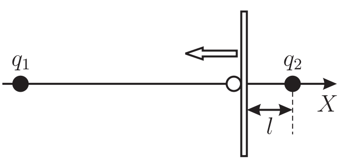
Для расчёта работы на участке 4–1 заметим, что кривая 1–4 получается из кривой 2–3 сжатием в два раза вдоль оси V, поэтому площади под кривыми 1–4 и 2–3 отличаются в два раза: $A_{41} = -A/2$. Суммарная работа в цикле, таким образом, равна

$$A_\Sigma = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = A + A - A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}.$$

Рассчитаем полученные газом количества теплоты на участках 1–2 и 2–3. Сообщаемое газу количество теплоты идёт на изменение его внутренней энергии, которая для одноатомного гелия равна $\frac{3}{2}pV$, и на совершение работы: $Q_{12} = \frac{3}{2}p_1(V_2 - V_1) + p_1(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}A$, $Q_{23} = A$. Суммарное количество теплоты, полученное на участке 1–2–3, равно $Q_{123} = Q_{12} + Q_{23} = \frac{5}{2}A + A = \frac{7}{2}A$.

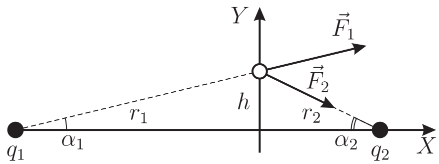
Следовательно, КПД цикла равен $\eta = \dfrac{A_\Sigma}{Q_{123}} = \dfrac{1}{7} \approx 14\%$.

4. Положительный q_1 и отрицательный q_2 точечные заряды закреплены на оси X по разные стороны от гладкой непроводящей пластины, плоскость которой перпендикулярна оси X. Маленький положительно заряженный шарик также находится на оси X, упираясь в пластину,



как показано на рисунке. Первоначально пластина расположена вблизи отрицательного заряда, шарик при этом находится в равновесии. Пластину начинают поступательно перемещать вдоль оси X, медленно увеличивая расстояние l между пластиной и отрицательным зарядом. Когда l достигает $1/3$ расстояния между зарядами, шарик «улетает» с оси X. Определите отношение q_1/q_2. Влиянием вещества пластины на электрическое поле, а также силой тяжести пренебречь.

Решение. Предположим, что шарик сместился вдоль оси Y, лежащей в плоскости пластины и перпендикулярной к оси X, на небольшое расстояние h (см. рисунок).



Проекция на ось Y результирующей силы, действующей на шарик со стороны точечных зарядов, равна

$$F_y = F_1 \sin\alpha_1 - F_2 \sin\alpha_2,$$

где $\sin\alpha_1 = \dfrac{h}{r_1}$, $\sin\alpha_2 = \dfrac{h}{r_2}$, а r_1 и r_2 — расстояния от шарика до зарядов q_1 и q_2 соответственно. Положение шарика на оси X будет устойчивым, если $F_y < 0$. Потеря устойчивости происходит при $F_1 \sin\alpha_1 = F_2 \sin\alpha_2$.

Из закона Кулона следует, что

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1}{-q_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Следовательно,

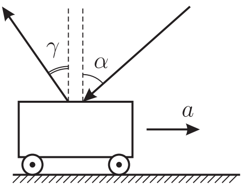
$$-\frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда

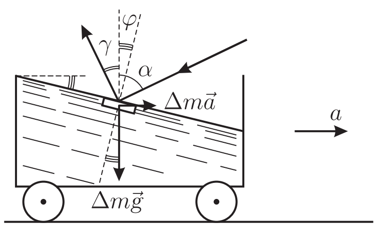
$$\frac{q_1}{q_2} = -\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3.$$

При малых h расстояния r_1 и r_2 примерно равны соответствующим расстояниям, измеренным вдоль оси X. Следовательно $\dfrac{q_1}{q_2} = -\left(\dfrac{2l}{l}\right)^3 = -8$.

5. Тележка с водой движется по горизонтальной поверхности с постоянным ускорением. На тележку под углом α к вертикали падает луч света, который после отражения распространяется под углом γ к вертикали (направления ускорения тележки и лучей показаны на рисунке). Найдите ускорение a тележки. Ускорение свободного падения равно g.



Решение. Из закона отражения света вытекает, что нормаль к свободной поверхности воды направлена под углом $\varphi = \dfrac{\alpha - \gamma}{2}$ к вертикали (см. рисунок).



Следовательно, свободная поверхность воды наклонена под этим углом к горизонтали. Рассмотрим слой воды массой Δm на свободной поверхности. Запишем для него второй закон Ньютона в проекции на плоскость, касательную к поверхности: $\Delta mg\sin\varphi = \Delta ma\cos\varphi$. Отсюда $a = g\,\mathrm{tg}\,\varphi = g\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha - \gamma}{2}$.

Городской этап 2007/2008 уч. года. 2-й тур

Состоялся 29 февраля 2008 года.

8 класс

На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

1. Заяц убегает от Волка по прямой, двигаясь равномерно. В начальный момент времени расстояние между Зайцем и Волком равно $S = 36$ м, а скорость Волка равна $v_0 = 14$ м/с. Волк устаёт и через каждые $\Delta t = 10$ с (в моменты времени Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, …, считая от начала движения) уменьшает свою скорость на $\Delta v = 1$ м/с. С какой скоростью должен бежать Заяц, чтобы Волк его не поймал?

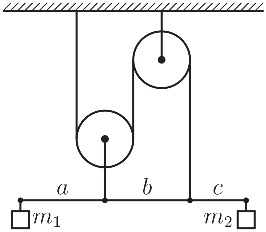
Решение. Если Заяц будет убегать со скоростью 11 м/с, то Волк будет приближаться к Зайцу в течение первых 10 с со скоростью 3 м/с, в течение следующих 10 с — со скоростью 2 м/с. Поэтому Волк догонит Зайца.

Если Заяц будет убегать со скоростью 12 м/с, то Волк будет приближаться к Зайцу в течение первых 10 с со скоростью 2 м/с, в течение последующих 10 с — со скоростью 1 м/с. За 20 с расстояние между животными уменьшится на 30 м и далее перестанет уменьшаться. Заяц убежит от Волка.

Таким образом, искомая минимальная скорость Зайца лежит в интервале от 11 м/с до 12 м/с. Обозначим её через $(12 - u)$ м/с, где $0 < u < 1$. За первые 10 с Волк приближается к Зайцу со скоростью $(2 + u)$ м/с, за вторые 10 с — со скоростью $(1 + u)$ м/с, за третьи 10 с — со скоростью u м/с. В дальнейшем Волк начнёт отставать от Зайца. За 30 с расстояние между животными уменьшится на $10(2 + u) + 10(1 + u) + 10u = 30 + 30u$ метров. Следовательно, Заяц убежит от Волка, если $36 > 30 + 30u$, или $u < 0{,}2$.

Следовательно, скорость Зайца должна превышать 11,8 м/с.

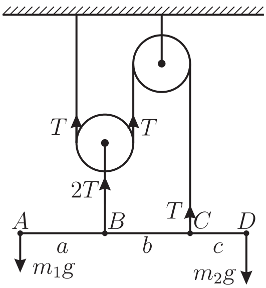
2. Рычаг подвешен к системе блоков так, что точки подвеса делят его в отношении $a : b : c$ (см. рисунок). Блоки, рычаг и нити невесомы, трения нет. Каково отношение масс грузов m_1 и m_2, если система находится в равновесии?



Решение. Пусть перекинутая через блоки нить натянута с силой T (см. рисунок). Тогда к рычагу приложены следующие силы: в точке A — направленная вниз сила тяжести m_1g, в точке B — направленная вверх сила натяжения нити $2T$, в точке C — направленная вверх сила натяжения нити T, в точке D — направленная вниз сила тяжести m_2g. Поскольку геометрическая сумма сил, действующих на рычаг, должна быть равна нулю, получаем первое уравнение: $3T = m_1g + m_2g$, из которого находим

$$T = \frac{1}{3}(m_1 + m_2)g.$$

Запишем правило равновесия рычага относительно одной из точек, например, относительно точки A:



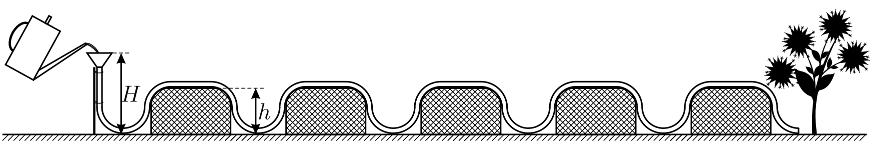
$$2T \cdot a + T \cdot (a + b) = m_2g \cdot (a + b + c).$$

Подставляя в это соотношение значение T, находим:

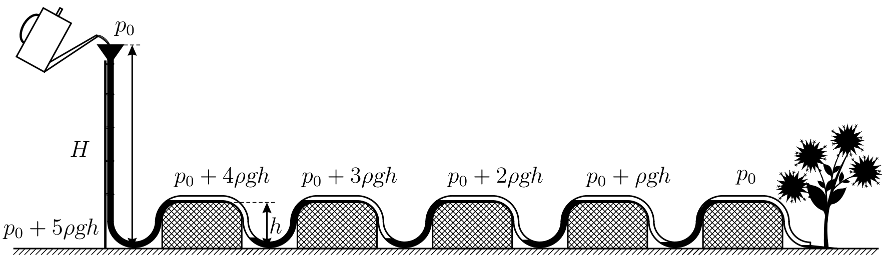
$$(m_1 + m_2)ga + \frac{1}{3}(m_1 + m_2)gb = m_2g(a + b + c).$$

Отсюда $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{2b + 3c}{3a + b}$.

3. Школьнику поручили полить сад на даче. Чтобы не таскать воду в лейке, он проложил толстый шланг через грядки на огороде так, как показано на рисунке, продул шланг, вставил в него небольшую воронку и начал медленно наливать в неё воду. Через некоторое время воронка заполнилась, вода в ней перестала опускаться, но из другого конца шланга не полилась. Тогда школьник поднял воронку выше и налил в неё ещё воды. Приблизительно до какой высоты H над землёй ему надо поднять воронку с водой, чтобы она начала вытекать из шланга? Высота каждой грядки $h = 40$ см, число грядок $n = 5$.



Решение. При медленном наливании воды в шланг она доходит до гребня первой грядки, стекает по шлангу вниз и начинает заполнять следующий его отрезок — до гребня второй грядки. При этом в куске шланга, спускающемся с первой грядки, остаётся воздушная пробка, запертая с двух сторон водой. При дальнейшем наливании воды в шланг и постепенном подъёме воронки процесс повторяется, образуются новые воздушные пробки, и вода потечёт из конца шланга, только когда дойдёт до гребня последней грядки (см. рисунок).



Если атмосферное давление на выходе из шланга и на уровне воронки равно p_0, то давление в воздушных пробках при переходе через каждую грядку от конца шланга в сторону воронки возрастает приблизительно на ρgh. Перед первой грядкой оно будет равно, таким образом, $p_0 + n\rho gh$, и для его преодоления воронка с водой должна быть поднята на такую высоту H, чтобы давление воды в нижней точке шланга под воронкой было не меньше этой величины: $p_0 + \rho gH \geqslant p_0 + n\rho gh$, или $H \geqslant nh = 2$ м.

Полученное значение слегка завышено, поскольку с ростом давления объёмы воздушных пробок и перепады высот на грядках немного уменьшаются. Однако полученная высота составляет всего 20% от высоты $h_0 = \dfrac{p_0}{\rho g} \approx 10$ м, соответствующей атмосферному давлению p_0, так что уменьшением объёмов пробок можно пренебречь и считать, что высота воронки над землёй в момент начала вытекания воды из шланга должна составлять примерно $H \approx nh = 2$ м.

4. В чашку налили раствор кофе при температуре $t_1 = 100$ °C и бросили туда несколько кубиков льда, взятого при температуре $t_0 = 0$ °C. Когда лёд растаял, температура раствора оказалась равной $t_2 = 50$ °C. На сколько процентов уменьшилась концентрация кофе в растворе? Теплообмен раствора кофе с окружающей средой не учитывать. Удельные теплоёмкости раствора кофе и воды одинаковы и равны $c = 4{,}2\ \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\ ^\circ\text{C}}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг.

Замечание. Под концентрацией понимается отношение массы чистого кофе ко всей массе раствора.

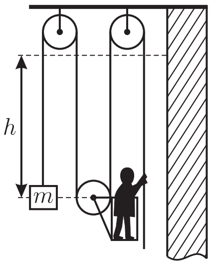
Решение. Пусть n_1 — начальная концентрация кофе в растворе, n_2 — конечная, M — масса раствора, m — масса льда. Тогда масса чистого кофе в растворе равна $Mn_1 = (M + m)n_2$, и отношение концентраций выражается через отношение масс: $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{M}{M + m}$.

Чтобы найти отношение масс раствора кофе и льда, запишем уравнение теплового баланса. Раствор кофе отдаёт количество теплоты $cM(t_1 - t_2)$, лёд получает количество теплоты $\lambda m + cmt_2$, поэтому $cM(t_1 - t_2) = \lambda m + cmt_2$, и $\dfrac{m}{M} = \dfrac{c(t_1 - t_2)}{\lambda + ct_2}$. Используя это соотношение, получаем искомое отношение концентраций: $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{\lambda + ct_2}{\lambda + ct_1} = 0{,}72$. Следовательно, концентрация кофе в растворе уменьшится на 28 процентов.

9 класс

На выполнение задания отводилось 4 астрономических часа.

1. Человек поднялся вдоль верхнего участка стены здания на высоту $h = 2$ м с помощью системы, состоящей из груза массой $m = 25$ кг, нерастяжимой верёвки, трёх блоков и люльки, прикреплённой одному из блоков (см. рисунок). В начальный момент вся система вместе с человеком была неподвижна. Когда человек поднимался, конец верёвки в его руках двигался относительно стены со скоростью $v = 1{,}2$ м/с. Сколько времени длился подъём? Какую работу совершил человек? Блоки, люлька и верёвка невесомы, трения нет, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Решение. Найдём соотношение масс груза m и человека M. Первоначально, когда человек покоился, система находилась в равновесии. При этом сила тяжести mg, действующая на груз, уравновешивалась силой натяжения верёвки T_0, а сила тяжести Mg, действующая на человека, уравновешивалась силой $3T_0$. Следовательно, $M = 3m$.

Когда человек начал двигаться с ускорением, равновесие нарушилось, и сила натяжения верёвки T стала больше mg. Направленные вверх ускорения груза a_1 и человека a можно найти с помощью второго закона Ньютона:

$$a_1 = \frac{T - mg}{m}; \qquad a = \frac{3T - Mg}{M} = \frac{3T - 3mg}{3m} = \frac{T - mg}{m}.$$

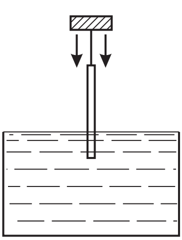
Таким образом, эти ускорения равны; поэтому и скорости, приобретаемые грузом и человеком, а также пройденные ими расстояния, оказываются равными во все моменты времени.

Выразим направленную вниз скорость v свободного конца верёвки через направленную вверх скорость человека u, равную скорости груза. За время подъёма $\tau = \dfrac{h}{u}$ длина нерастяжимой верёвки не изменяется, поэтому $v\tau - 3u\tau = 0$, и $u = \dfrac{v}{3}$. Отсюда длительность подъёма $\tau = \dfrac{3h}{v} = 5$ с.

Работа A, совершённая человеком, пошла на увеличение потенциальной энергии человека и груза, а также на придание им кинетической энергии:

$$A = (m + M)gh + \frac{(m + M)u^2}{2} = 4mgh + \frac{2}{9}mv^2 = 2008 \text{ Дж}.$$

2. Тонкий карандаш, подвешенный на нитке за один из концов, начинают погружать в воду, медленно опуская точку подвеса (см. рисунок). Определите максимальную глубину h погружения нижнего конца карандаша, если длина карандаша $l = 18$ см, а его средняя плотность в $n = 2$ раза меньше плотности воды.



Решение. Рассмотрим карандаш, погруженный в воду и отклонённый от вертикали на малый угол α. Суммарный момент сил тяжести и Архимеда относительно горизонтальной оси, проходящей через верхний конец карандаша, равен

$$M = mg\frac{l}{2}\sin\alpha - F_A\left(l - \frac{x}{2}\right)\sin\alpha,$$

где $F_A = \rho g S x$ — сила Архимеда, ρ — плотность воды, S — площадь поперечного сечения карандаша, x — длина погруженной в воду части карандаша, $m = (\rho/n)Sl$ — масса карандаша. При $M > 0$ момент сил возвращает карандаш в вертикальное положение, при $M < 0$ увеличивает отклонение карандаша от вертикали. Формулу для момента сил можно переписать в виде:

$$M = \left(x^2 - 2lx + \frac{l^2}{n}\right)\frac{\rho g S}{2}\sin\alpha.$$

Из этой формулы следует, что при малых x момент $M > 0$ и, следовательно, вертикальное положение карандаша будет устойчивым. Потеря устойчивости вертикального положения происходит при

$$x = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right),$$

когда момент сил меняет знак с положительного на отрицательный. При дальнейшем погружении карандаша он будет отклоняться от вертикали, но длина x погруженной в воду его части меняться не будет, поскольку в равновесии момент сил M должен оставаться равным нулю. Поэтому глубина погружения нижнего конца карандаша, равная $x\cos\alpha$, будет при этом уменьшаться. Итак, максимальная глубина погружения нижнего конца карандаша равна

$$h = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) = l\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 5{,}3\ \text{см}.$$

3. На раскалённой плите стоит сосуд с кипящей водой (температура $t_\text{к} = 100\ ^\circ\text{C}$), начальная масса которой равна m_0. Вода испаряется, а часть пара конденсируется на куске льда, расположенном над сосудом, и стекает обратно. Начальная масса льда m, а его начальная температура $t_0 = 0\ ^\circ\text{C}$. Когда весь лёд растаял, масса воды в сосуде оказалась равной m_1. Какая доля w от всего пара конденсировалась на куске льда? Какое количество теплоты Q было передано от плиты к сосуду? Доля конденсирующегося пара всё время постоянна. Удельная теплоёмкость воды равна C, удельная теплота плавления льда λ, удельная теплота парообразования воды r. Контактным теплообменом воды и льда с окружающей средой пренебречь.

Решение. Найдём долю сконденсированного пара. Пусть Δm — масса воды, испарившейся из сосуда. При этом масса пара $w\Delta m$ сконденсировалась на куске льда и стекла затем вниз вместе с талой водой, получившейся при таянии льда. Следовательно, $m_1 = m_0 + m - \Delta m + w\Delta m$, и $\Delta m = \dfrac{m_0 + m - m_1}{1 - w}$. При конденсации и охлаждении до температуры плавления льда пар отдаёт количество теплоты

$$(r + Ct_{\text{к}})w\Delta m = (r + Ct_{\text{к}})(m_0 + m - m_1)\frac{w}{1 - w},$$

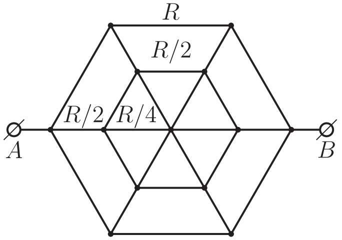
а лёд получает количество теплоты λm. Отсюда

$$(r + Ct_{\text{к}})(m_0 + m - m_1)\frac{w}{1 - w} = \lambda m,$$

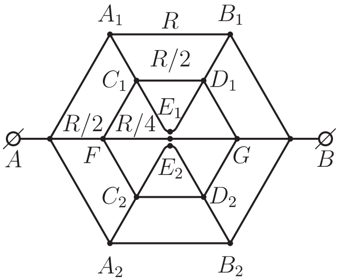
$$w = \frac{\lambda m}{\lambda m + (r + Ct_{\text{к}})(m_0 + m - m_1)}.$$

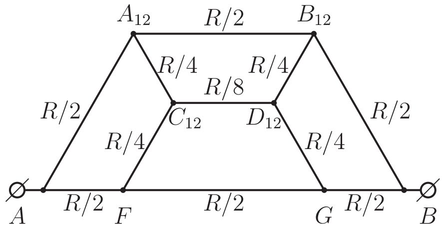
Переданное от плиты к сосуду количество теплоты Q пошло на превращение в пар массы воды $(1 - w)\Delta m = m_0 + m - m_1$, которая не сконденсировалась, а также на плавление льда массой m и нагревание талой воды от температуры плавления до температуры кипения. Поэтому $Q = r\,(m_0 - m_1 + m) + \lambda m + Cmt_{\text{к}}$.

4. Найти сопротивление электрической цепи между точками A и B (см. рисунок). Сопротивление стороны большого шестиугольника равно R, сопротивление стороны малого шестиугольника равно $R/2$, сопротивление каждого внутреннего проводника, заключённого между шестиугольниками, равно $R/2$, а сопротивление каждого проводника, находящегося внутри малого шестиугольника, равно $R/4$.

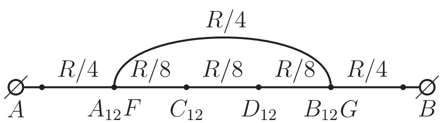


Решение. В схеме электрической цепи, изображённой на первом рисунке, точки E_1, E_2 и центр схемы имеют, в силу её симметрии, одинаковые потенциалы. При их соединении проводником с нулевым сопротивлением токи в цепи и её сопротивление не меняются, а полученная при таком преобразовании схема совпадает со схемой, приведённой в условии.





Будем поэтому рассчитывать сопротивление эквивалентной электрической цепи, схема которой изображена на первом рисунке. В ней пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, D_1 и D_2 также в силу симметрии имеют попарно одинаковые потенциалы. Соединяя их, получаем следующую эквивалентную схему, изображённую на втором рисунке; здесь учтено, что сопротивление двух параллельно соединённых одинаковых резисторов вдвое меньше сопротивления каждого из них.



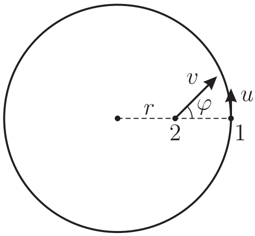
В схеме на втором рисунке, как следует из соображений симметрии, пары точек A_{12} и F, B_{12} и G имеют одинаковые потенциалы; соединяя их, получаем электрическую цепь, схема которой изображена на третьем рисунке. Её сопротивление легко рассчитывается по формулам последовательного и параллельного соединения резисторов: оно равно $\dfrac{13R}{20}$.

10 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

1. Школьник бежит по окружности радиусом $R = 30$ м с постоянной по величине скоростью $u = 3{,}14$ м/с. Второй школьник гонится за ним, стартовав из центра окружности. В процессе погони он всё время находится на радиусе, соединяющем центр окружности и первого школьника, а величина его скорости неизменна и равна $v = 2u$. Сколько времени займёт погоня?

Решение. Обозначим через $\omega = u/R$ угловую скорость движения первого школьника, r — расстояние от второго школьника до центра, φ — угол между направлением скорости второго школьника и радиусом (см. рисунок).



Поскольку составляющая скорости второго школьника, перпендикулярная радиусу, равна ωr, а модуль его скорости равен $v = 2u = 2\omega R$, имеем:

$$\sin\varphi = \frac{\omega r}{2\omega R} = \frac{r}{2R}.$$

Следовательно, в процессе погони угол φ изменяется от начального значения, равного нулю, до конечного значения, равного $\varphi_0 = \arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.

Найдём промежуток времени Δt, за который угол φ изменяется на некоторую малую величину $\Delta\varphi$. Для этого заметим, что за данный промежуток времени второй школьник удаляется от центра окружности на расстояние

$$\Delta r = 2R\cdot\Delta(\sin\varphi) = 2R(\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi) =$$

$$= 2R\cdot 2\cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Учтём, что синус малого угла приближённо равен его радианной мере:

$$\Delta r \approx 2R\cdot 2\cos\varphi\cdot\frac{\Delta\varphi}{2} = 2R\cos\varphi\cdot\Delta\varphi.$$

Поскольку радиальная составляющая скорости второго школьника равна $2\omega R\cos\varphi$, он удалится от центра окружности на расстояние Δr за время

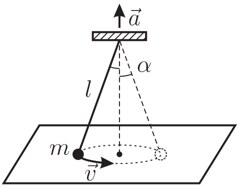
$$\Delta t = \frac{\Delta r}{2\omega R\cos\varphi} = \frac{2R\cos\varphi\cdot\Delta\varphi}{2\omega R\cos\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{\omega},$$

пропорциональное изменению угла.

Следовательно, время, которое займёт погоня, составит

$$t = \frac{\varphi_0}{\omega} = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{\pi R}{6u} = 5\ \text{с}.$$

2. Небольшой груз массой m, привязанный нитью длиной l к платформе (см. рисунок), движется по гладкой поверхности стола со скоростью v, описывая окружность. Нить невесома и нерастяжима и образует угол α с вертикалью. Платформа начинает двигаться вверх с ускорением $\vec{a}$; при этом вначале груз не отрывается от стола. Найдите величины действующих на груз сил натяжения нити T и реакции стола N сразу после начала движения платформы.



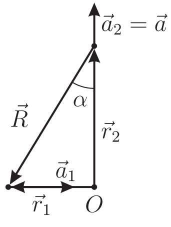
Решение. Пусть a_1 — составляющая ускорения груза, направленная к центру окружности. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления в вертикальной плоскости, проходящей через нить:

$$T\cos\alpha - mg + N = 0, \quad T\sin\alpha = ma_1.$$

Отсюда

$$T = \frac{ma_1}{\sin\alpha}, \quad N = mg - ma_1 \operatorname{ctg}\alpha.$$

Для получения ответа остаётся найти величину a_1. Поместим начало прямоугольной системы координат в центр окружности, по которой движется груз (см. рисунок). Обозначим через $\vec{r}_1$ радиус-вектор конца нити, прикреплённого к грузу, $\vec{r}_2$ — радиус-вектор конца нити, прикреплённого к платформе, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — скорости концов нити, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — ускорения концов нити. Введём также обозначения для относительных величин: $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (модуль этой величины равен длине нити), $\vec{V} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (скорость груза относительно верхнего конца нити), $\vec{A} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$. Заметим, что



$$\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} - \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{A}.$$

Так как нить нерастяжима и в процессе движения груза всё время натянута, то скорость груза относительно верхнего конца нити всегда направлена перпендикулярно нити. Это означает, что скалярное произведение $\vec{R} \cdot \vec{V} = 0$.

Пусть за малое время Δt векторы $\vec{R}$ и $\vec{V}$ получили малые приращения $\Delta\vec{R}$ и $\Delta\vec{V}$. Запишем для момента времени $t + \Delta t$ полученное выше условие перпендикулярности:

$$\left(\vec{R} + \Delta\vec{R}\right) \cdot \left(\vec{V} + \Delta\vec{V}\right) = 0.$$

Раскрывая скобки, пренебрегая малой величиной $\Delta\vec{R} \cdot \Delta\vec{V}$ и деля обе части на Δt, с учётом того, что $\vec{R} \cdot \vec{V} = 0$, получим:

$$\vec{V} \cdot \vec{V} + \vec{R} \cdot \vec{A} = 0.$$

Сразу после начала движения платформы $\vec{v}_1 = \vec{v}$, $\vec{v}_2 = 0$ и

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = v^2, \quad \vec{R} \cdot \vec{A} = \vec{R} \cdot \vec{a}_1 - \vec{R} \cdot \vec{a}_2 = -la_1 \cdot \sin\alpha + la \cdot \cos\alpha.$$

Следовательно, $v^2 - la_1 \cdot \sin\alpha + la \cdot \cos\alpha = 0$, и $a_1 = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \dfrac{v^2}{l \cdot \sin\alpha}$. Подставляя найденное ускорение a_1 в полученные выше формулы для сил, приходим к ответу:

$$T = \frac{ma \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} + \frac{mv^2}{l\sin^2\alpha}, \quad N = mg - ma \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{mv^2 \operatorname{ctg}\alpha}{l\sin\alpha}.$$

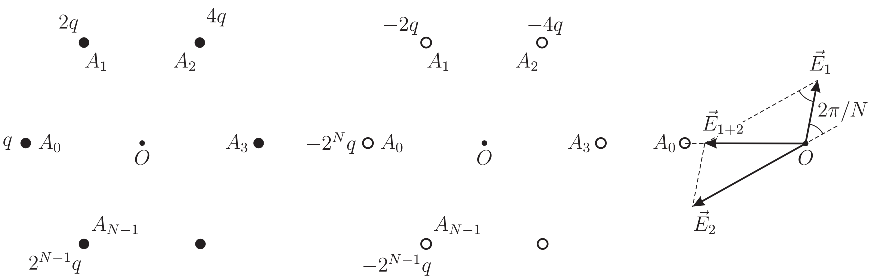
3. Порция гелия объёмом $V_0 = 1$ л находится под давлением $p_0 = 1$ атм при температуре 0 °C. Гелий расширяют в равновесном процессе таким образом, что отданное им в окружающую среду количество теплоты Q в четыре раза меньше совершённой гелием работы A. Найдите максимально возможное значение работы A газа в таком процессе.

Решение. Пусть U_0 и U — начальное и конечное значения внутренней энергии газа. Переданная окружающей среде энергия равна $U_0 - U$. Согласно первому началу термодинамики, она складывается из количества теплоты $Q = A/4$ и работы A; отсюда $U_0 - U = (5/4)A$. Конечная внутренняя энергия гелия не может быть отрицательна, поэтому работа A не может превосходить $(4/5)U_0$. При указанных в задаче численных данных гелий находится в газообразном состоянии. Считая одноатомный газ идеальным, находим: $U_0 = (3/2)p_0V_0$.

Следовательно, максимально возможная работа гелия равна $A_{\max} = (4/5)U_0 = 1{,}2p_0V_0 = 120$ Дж.

4. В вершинах правильного N-угольника расположены последовательно электрические заряды, величины которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2 и равны q, $2q$, ... , $2^{N-1}q$. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно R. Найдите величину E напряжённости электрического поля в центре многоугольника.

Решение. Пронумеруем вершины многоугольника как A_0, A_1, ..., A_{N-1}; тогда в вершине A_k находится заряд $2^k q$. Проведём с исходной системой зарядов 1 следующие преобразования: повернём её на угол $\dfrac{2\pi}{N}$ так, чтобы заряд из точки A_k перешёл в точку A_{k+1}; увеличим величины зарядов в два раза и изменим их знаки — получим систему зарядов 2 (см. рисунок):



система 1 система 2

Напряжённость электрического поля в центре многоугольника, создаваемую системой 1, обозначим как $\vec{E}_1$, системой 2 — как $\vec{E}_2$. Вектор $\vec{E}_2$ получается из $\vec{E}_1$ поворотом на угол $\dfrac{2\pi}{N}$, растяжением в два раза и изменением направления на противоположное.

Наложим теперь системы зарядов 1 и 2 друг на друга, получив систему зарядов «1+2». Все заряды, кроме расположенных в точке A_0, будут компенсированы, поэтому система «1+2» состоит из одного заряда величиной $-q\left(2^N-1\right)$. Следовательно, система «1+2» создаёт в центре многоугольника электрическое поле с величиной напряжённости $\left|\vec{E}_{1+2}\right| = \dfrac{q\left(2^N-1\right)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. С другой стороны, вектор напряжённости $\vec{E}_{1+2}$ можно получить, складывая векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ по правилу параллелограмма, как показано на рисунке. Используя теорему косинусов, находим:

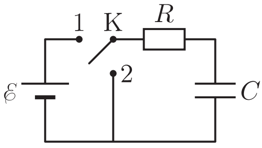
$$|\vec{E}_{1+2}|^2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 - 2|\vec{E}_1| \cdot |\vec{E}_2| \cdot \cos\frac{2\pi}{N} =$$

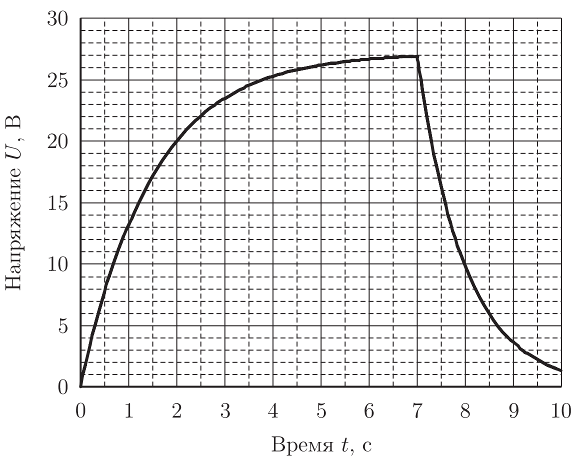
$$= E^2 + 4E^2 - 4E^2\cos\frac{2\pi}{N} = E^2\left(5 - 4\cos\frac{2\pi}{N}\right).$$

Следовательно,

$$E\sqrt{5 - 4\cos\frac{2\pi}{N}} = \frac{q\left(2^N - 1\right)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, \qquad E = \frac{q\left(2^N - 1\right)}{4\pi\varepsilon_0 R^2\sqrt{5 - 4\cos\frac{2\pi}{N}}}.$$

5. Школьники Вова и Дима собрали электрическую цепь, состоящую из самодельной батареи с ЭДС $\mathscr{E}$, резистора сопротивлением $R = 20$ кОм, конденсатора ёмкостью C и двухпозиционного ключа K (см. схему). Затем они в момент времени $t = 0$ с включили секундомер, замкнули ключ в положение 1 и спустя некоторое время переключили ключ в положение 2. Получившаяся у Вовы и Димы зависимость напряжения U на конденсаторе от времени показана на рисунке. Проанализировав этот график, они смогли определить, чему равны ёмкость конденсатора C, ЭДС $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r аккумуляторной батареи. Найдите эти значения.





Решение. Рассмотрим процессы, происходящие в цепи. При замыкании ключа К в положение 1 конденсатор C заряжается через сопротивление R от батареи с некоторой ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, что, очевидно, соответствует участку графика от 0 до 7 с. При переключении ключа в положение 2 происходит постепенная разрядка конденсатора через сопротивление R, что видно на участке графика от 7 до 10 с. Запишем уравнения для этих переходных процессов. При зарядке конденсатора

$$\mathscr{E} = R \cdot I + r \cdot I + \frac{Q}{C}.$$

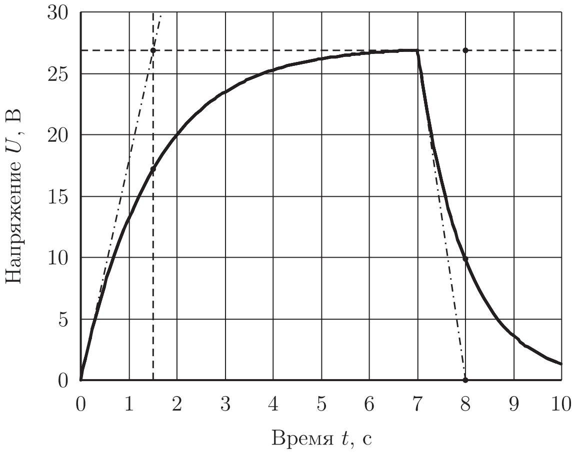
Очевидно, что в начальный момент времени заряд Q на конденсаторе равен нулю. Потому ток, протекающий через резистор в начальный момент, с одной стороны, равен $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R+r}$, а с другой стороны, он является скоростью изменения заряда на конденсаторе: $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{\Delta U}{\Delta t}C$. Если мы определим угловой коэффициент касательной к графику $U(t)$ в точке $t = 0$ с, то есть начальную скорость роста напряжения на конденсаторе $\dfrac{\Delta U}{\Delta t}$, то сможем найти значение выражения $\dfrac{\mathscr{E}}{(R+r)C}$.

Далее, из графика видно, что к моменту времени $t = 7$ с напряжение на конденсаторе уже почти не меняется, то есть ток очень мал, и можно утверждать, что напряжение на конденсаторе стало практически равно ЭДС батареи $\mathscr{E}$, а заряд на конденсаторе стал равен $\mathscr{E}C$.

После переключения ключа в положение 2 уравнение разрядки конденсатора выглядит так:

$$0 = R \cdot I + \frac{Q}{C}.$$

Ток, протекающий через резистор в первый момент после переключения ключа, с одной стороны, равен $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R}$, а с другой стороны, как уже отмечалось, он является скоростью уменьшения заряда на конденсаторе: $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{\Delta U}{\Delta t}C$. Если мы определим величину углового коэффициента касательной к графику разрядки $U(t)$ в точке $t = 7$ с, то есть сразу после переключения ключа в положение 2, то сможем найти значение выражения $\dfrac{\mathscr{E}}{RC}$.



Построим обе касательные к графику $U(t)$ и асимптоту, к которой он стремится на этапе зарядки конденсатора. Из этого построения получаем, что ЭДС батареи $\mathscr{E} \approx 27$ В, а величины угловых коэффициентов равны $\dfrac{\mathscr{E}}{(R+r)C} \approx 18$ В/с и $\dfrac{\mathscr{E}}{RC} \approx 27$ В/с. По этим данным далее находим $(R+r)C \approx 1{,}5$ с, $RC \approx 1$ с, откуда $C \approx 50$ мкФ и $r \approx 10$ кОм. Аккумуляторная батарея у школьников получилась очень плохая — видимо, она была собрана из «севших» гальванических элементов.

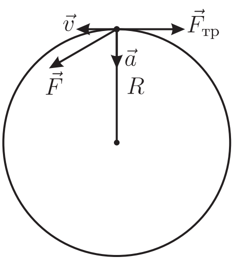
Заметим, что задачу можно решать и несколько по-другому, если знать, что зарядка и разрядка конденсатора через резистор происходят по экспоненциальному закону. При этом величина разности текущего значения $U(t)$ напряжения на конденсаторе и предельного значения $U(t \to \infty)$ в конце процесса (то есть $\mathscr{E}$ при зарядке и 0 при разрядке) уменьшается с течением времени по закону $e^{-t/\tau}$, где постоянная времени τ при зарядке равна $(R+r) \cdot C$, а при разрядке $R \cdot C$. Если провести упомянутые выше касательные и асимптоты, то расстояния по времени от точек начала касательных до точек их пересечения с асимптотами будут равны соответствующим постоянным времени τ, что позволяет сразу же найти из построения величины $\mathscr{E} \approx 27$ В, $\tau_1 = (R+r) \cdot C \approx 1{,}5$ с и $\tau_2 = R \cdot C \approx 1$ с, и далее C и r. Из построения видно также, что спустя время τ после начала процесса зарядки или разрядки конденсатора разность текущего и конечного значения напряжения уменьшается по величине в $e \approx 2{,}7$ раза по сравнению с начальным её значением, то есть от 27 В до 10 В.

11 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

1. На горизонтальном столике лежит маленькая шайба массой $m = 100$ г. Столик покрыт такой смазкой, что при движении шайбы со скоростью v возникает сила вязкого трения, равная $\vec{F}_{\text{тр}} = -\gamma\vec{v}$, где $\gamma = 0{,}4$ кг/с. Сухого трения нет. На шайбу начинают действовать силой, вектор которой вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega = 3$ рад/с, а модуль не меняется со временем и равен $F = 0{,}3$ Н. В установившемся режиме шайба движется с постоянной скоростью по окружности. Найдите её радиус R.

Решение. На шайбу действуют внешняя сила $\vec{F}$ и направленная против движения сила вязкого трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, равная по модулю $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \gamma\omega R$. Шайба движется с направленным к центру окружности ускорением $\vec{a}$, равным по величине $|\vec{a}| = \omega^2 R$ (см. рисунок). Согласно второму закону Ньютона, $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}}$. Учитывая, что $\vec{a} \perp F_{\text{тр}}$, находим:

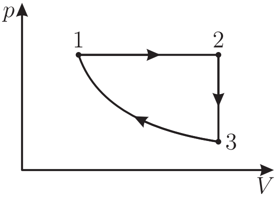


$$|\vec{F}|^2 = |m\vec{a}|^2 + |\vec{F}_{\text{тр}}|^2 = (m\omega^2 R)^2 + (\gamma\omega R)^2.$$

Отсюда $R = \dfrac{F}{\omega\sqrt{(m\omega)^2 + \gamma^2}} = 0{,}2$ м.

2. С порцией гелия проводят циклический процесс, состоящий из изобарного расширения, изохорного охлаждения и адиабатного сжатия. Может ли КПД такого цикла η оказаться больше 50%? Чему равен максимально возможный КПД такого цикла?

Решение. Изобразим цикл, проводимый с ν молями гелия, на pV–диаграмме (см. рисунок): 1–2 — изобара, 2–3 — изохора, 3–1 — адиабата. Пусть T_1, T_2, T_3 — температуры гелия в точках 1, 2 и 3 по термодинамической шкале. Поскольку изобарная теплоёмкость порции гелия, содержащей ν молей, равна $2{,}5\nu R$, гелий на участке 1–2 получает от нагревателя количество теплоты $Q^+ = 2{,}5\nu R(T_2 - T_1)$. Изохорная



теплоёмкость данной порции гелия равна $1{,}5\nu R$, поэтому на участке 2–3 гелий отдаёт холодильнику количество теплоты $Q^- = 1{,}5\nu R(T_2 - T_3)$. При адиабатном сжатии температура гелия повышается ($T_1 > T_3$), поэтому $Q^- > 1{,}5\nu R(T_2 - T_1)$.

Отсюда $\dfrac{Q^-}{Q^+} > \dfrac{3}{5}$, и $\eta = 1 - \dfrac{Q^-}{Q^+} < 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$.

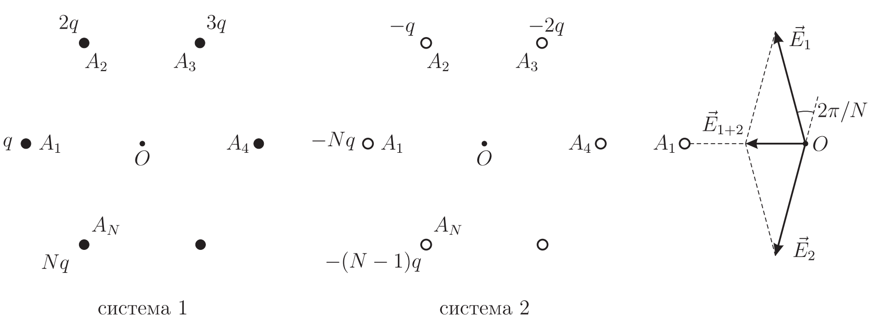
Покажем, что к значению КПД $\eta = 40\%$ можно приблизиться сколь угодно близко. Пусть температура газа на участке 1–2 возрастает в n раз: $T_2 = nT_1$. Тогда $Q^+ = 2{,}5\nu R(n-1)T_1$, а, поскольку $T_3 > 0$, то $Q^- < 1{,}5\nu RT_2 = 1{,}5\nu RnT_1$. Тогда

$$\eta = 1 - \frac{Q^-}{Q^+} > 1 - \frac{3}{5}\frac{n}{n-1} = 0{,}4 - \frac{3}{5(n-1)}.$$

Следовательно, выбирая достаточно большое n, можно приблизиться к предельному значению $\eta = 40\%$ сколь угодно близко.

3. В вершинах правильного N-угольника расположены последовательно электрические заряды, величины которых образуют арифметическую прогрессию с разностью q и равны q, $2q$, …, Nq. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно R. Найдите величину напряжённости E электрического поля в центре многоугольника.

Решение. Пронумеруем вершины многоугольника как A_1, A_2, …, A_N (см. рисунок); тогда в вершине A_k находится заряд kq. Проведём с исходной системой зарядов 1 следующие преобразования: повернём её на угол $\dfrac{2\pi}{N}$ так, чтобы точка A_k перешла в точку A_{k+1}, и изменим знаки зарядов — получим систему зарядов 2 (см. рисунок).



Рассмотрим также систему зарядов 3, состоящую из N одинаковых зарядов $-q$, размещённых в вершинах данного многоугольника.

Напряжённость электрического поля в центре многоугольника, создаваемую системой 1, обозначим как $\vec{E}_1$, системой 2 — как $\vec{E}_2$. Вектор $\vec{E}_2$ получается из $\vec{E}_1$ поворотом на угол $\dfrac{2\pi}{N}$ и изменением направления на противоположное. Система зарядов 3 создаёт в центре многоугольника нулевую напряжённость электрического поля.

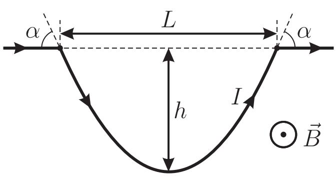
Наложим теперь системы зарядов 1, 2 и 3 друг на друга, получив систему зарядов «1+2+3». В ней все заряды, кроме расположенных в точке A_1, будут скомпенсированы, поэтому система «1+2+3» состоит из одного заряда величиной $-Nq$ в точке A_1. Система «1+2+3» создаёт в центре многоугольника электрическое поле напряжённостью $|\vec{E}_{1+2+3}| = |\vec{E}_{1+2}| = \dfrac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. С другой стороны, вектор напряжённости $\vec{E}_{1+2}$ можно получить, складывая векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ по правилу параллелограмма (см. рисунок). Используя теорему косинусов, находим:

$$|\vec{E}_{1+2}|^2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 - 2|\vec{E}_1| \cdot |\vec{E}_2| \cdot \cos\frac{2\pi}{N} =$$

$$= E^2 + E^2 - 2E^2\cos\frac{2\pi}{N} = 2E^2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{N}\right) = 4E^2\sin^2\frac{\pi}{N}.$$

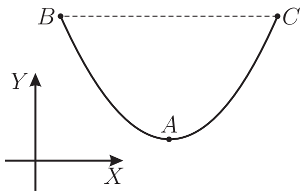
Следовательно, $2E\sin\dfrac{\pi}{N} = \dfrac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, и $E = \dfrac{Nq}{8\pi\varepsilon_0 R^2 \sin\dfrac{\pi}{N}}$.

4. Участок гибкого провода массой m подвешен так, что его концы закреплены на одинаковой высоте (см. рисунок). Провод находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией B, и по нему течёт ток I. Силы, действующие на провод в точках подвеса, образуют угол α с горизонтом. Найдите силу T натяжения провода в его нижней точке. Размеры L и h известны.



Решение. Обозначим нижнюю точку провода через A, верхние точки — через B и C (см. рисунок). Введём в плоскости провода декартову прямоугольную систему координат, направив ось X вправо, ось Y — вверх; обозначим координаты точек A и C как $(x_A; y_A)$ и $(x_C; y_C)$.

Рассмотрим участок провода AC. На него действуют направленная вниз сила тяжести $\dfrac{m\vec{g}}{2}$, направленная влево сила $\vec{T}$ натяжения нити в нижней точке A, направленная под углом α к горизонту сила натяжения нити $\vec{F}$ и сила Ампера $\vec{F}^{\text{магн}}$, действующая со стороны магнитного поля. Запишем условие равновесия системы в проекциях на оси X и Y:

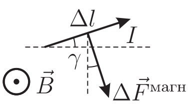


$$F_x^{\text{магн}} + F\cos\alpha - T = 0, \qquad F_y^{\text{магн}} + F\sin\alpha - \frac{mg}{2} = 0.$$

Выражая из второго соотношения неизвестную величину силы F и подставляя её в первое уравнение, находим искомую силу натяжения нити:

$$T = F_x^{\text{магн}} + \left(\frac{mg}{2} - F_y^{\text{магн}}\right)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Для получения ответа остаётся найти компоненты силы Ампера $\vec{F}^{\text{магн}}$. Рассмотрим маленький отрезок провода длиной Δl, составляющий угол γ с горизонтом и расположенный между точками с координатами $(x;y)$ и $(x+\Delta x; y+\Delta y)$, где $\Delta x = \Delta l\cdot\cos\gamma$, $\Delta y = \Delta l\cdot\sin\gamma$ (см. рисунок). На этот участок действует сила Ампера $\Delta\vec{F}^{\text{магн}}$, равная по модулю $IB\Delta l$ и направленная под углом γ к вертикали. Эта сила имеет компоненты



$$\Delta F_x^{\text{магн}} = \Delta F^{\text{магн}}\sin\gamma = IB\Delta l\sin\gamma = IB\Delta y;$$
$$\Delta F_y^{\text{магн}} = -\Delta F^{\text{магн}}\cos\gamma = -IB\Delta l\cos\gamma = -IB\Delta x.$$

Складывая силы Ампера, действующие на все малые отрезки участка AC провода, находим:

$$F_x^{\text{магн}} = IB(y_C - y_A) = IBh;$$
$$F_y^{\text{магн}} = -IB(x_C - x_A) = -IB\frac{L}{2}.$$

Подставляя результат в формулу для силы натяжения провода, приходим к ответу:

$$T = IBh + \frac{mg + IBL}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

5. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 30$ см создаёт изображение движущегося точечного источника света. Когда источник света пересекал главную оптическую ось линзы, двигаясь под углом $\alpha = 60^\circ$ к ней, угол между скоростью его изображения и этой осью составлял $\beta = 30^\circ$. На каком расстоянии от линзы в этот момент находился источник света?

Решение. Введём декартову прямоугольную систему координат, выбрав в качестве начала координат оптический центр O линзы и направив ось X от источника A в сторону центра линзы, а ось Y — перпендикулярно главной оптической оси в плоскости, проходящей через эту ось и вектор скорости источника. Обозначим координаты источника A и его изображения B через $(-a; y_A)$ и $(b; y_B)$ соответственно, а компоненты скорости источника и его изображения — через $(v_{Ax}; v_{Ay})$ и $(v_{Bx}; v_{By})$.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$, когда источник пересекал главную оптическую ось линзы, X-координаты источника и изображения равнялись $-a_0$ и b_0 соответственно; тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0} = \frac{1}{F}.$$

Аналогично, применяя формулу тонкой линзы в момент времени $\Delta t > 0$, имеем:

$$\frac{1}{a_0 - v_{Ax}\Delta t} + \frac{1}{b_0 + v_{Bx}\Delta t} = \frac{1}{F}.$$

Вычитая первую формулу из второй, находим:

$$\frac{v_{Ax}\Delta t}{a_0(a_0 - v_{Ax}\Delta t)} = \frac{v_{Bx}\Delta t}{b_0(b_0 + v_{Bx}\Delta t)}.$$

Считая Δt малым, получаем выражение для отношения X-компонент скоростей: $\dfrac{v_{Ax}}{v_{Bx}} = \dfrac{a_0^2}{b_0^2}$.

Найдём теперь отношение Y-компонент скоростей источника и изображения. Учтём, что луч, проходящий через оптический центр линзы, не преломляется; следовательно, точки O, A и B всегда лежат на одной прямой, и угловые коэффициенты прямых OA и OB совпадают:

$$-\frac{y_A}{a} = \frac{y_B}{b}.$$

В частности, в момент времени Δt получаем:

$$-\frac{v_{Ay}\Delta t}{a_0 - v_{Ax}\Delta t} = \frac{v_{By}\Delta t}{b_0 + v_{Bx}\Delta t}.$$

Считая Δt малым, находим:

$$\frac{v_{Ay}}{v_{By}} = -\frac{a_0}{b_0}.$$

Как вытекает из условия задачи,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \left|\frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} \cdot \frac{v_{Bx}}{v_{By}}\right| = \frac{|b_0|}{a_0}.$$

Следовательно, $b_0 = \pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \cdot a_0$. Подставляя данное соотношение в формулу тонкой линзы, находим: $\dfrac{1}{a_0} \pm \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{a_0 \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{F}$, и $a_0 = F\left(1 \pm \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$. Поскольку $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{3}$, то $a_0 = \dfrac{4}{3}F = 40$ см или $a_0 = \dfrac{2}{3}F = 20$ см.

Экспериментальный тур 2007/2008 уч. года

Состоялся 15 марта 2008 года.

Экспериментальный тур проводится начиная с самой первой Московской физической олимпиады (1939 год). До 2003 года включительно именно на экспериментальном туре определялись победители олимпиады.

С 2004 года формальные итоги олимпиады подводятся только по теоретическим турам. На экспериментальный тур, традиция проведения которого сохранилась, приглашаются по итогам теоретических туров московские школьники 9–11 классов. Это даёт возможность этим школьникам лучше подготовиться к участию во Всероссийской олимпиаде по физике, где при подведении итогов в равной степени учитываются результаты как теоретического, так и экспериментального туров.

Экспериментальный тур Московской физической олимпиады состоит из двух экспериментальных работ. На выполнение каждой работы отводится 2 астрономических часа. Для каждого класса (9, 10 и 11) предлагаются предлагается комплект из двух работ, одинаковый для всех школьников этого класса, но разные участники могут выполнять свои работы в разной последовательности (спустя 2 часа после начала тура школьники сдают отчёт по первой работе и меняются местами с теми, кто выполнял другую работу; тем самым номера работ «1» и «2» в каждом классе являются условными).

Для выполнения каждой работы участнику тура выдаётся краткое описание (именно эти краткие описания и приводятся здесь в качестве условий заданий) и комплект необходимого оборудования (измерительные инструменты, приборы, детали, изучаемый объект). Сотрудники жюри дают разъяснения перед выполнением каждой работы, отвечают на вопросы школьников по ходу её выполнения, устраняют возникающие при этом технические неполадки.

Обращаем ваше внимание, что описания работ и приведенные решения являются именно *краткими*. Они дают достаточно полное представление о работе, но не заменяют собой возможности реальной работы с оборудованием, разъяснений, ответов на вопросы и разбора решений после проведения тура. Пользуясь только приведёнными текстами, в принципе невозможно *полностью* разобраться в заданиях экспериментальных туров (в отличие от теоретических туров, где вся необходимая информация содержится в тексте условия задачи).

9 класс

9.1. Исследование полупроводникового диода.

Задание. Снять вольт-амперную характеристику диода, определить напряжение, при котором ток через диод составляет 0,1 мкА.

Оборудование. Диод неизвестного типа, батарейка напряжением 1,5 В с держателем, потенциометр 1 кОм, резисторы 1 кОм, 10 кОм, 39 кОм, мультиметр электронный.

Диод подключён к измерительной схеме при помощи зажимной панели (полярность подключения диода выбрана правильно!). Изменяя подаваемое на диод напряжение при помощи потенциометра, нужно определить зависимость тока через диод от приложенного напряжения в достаточно широком диапазоне токов. Проблема в том, что в Вашем распоряжении всего один измерительный прибор (универсальный многопредельный амперметр — вольтметр — омметр). Придумайте способ измерения нужных величин с использованием выданных резисторов (их сопротивления можно измерить тем же мультиметром с точностью не хуже 1%).

Справочные данные. В режиме измерения напряжений вольтметр имеет сопротивление 1 МОм (одинаковое на разных пределах, это значение можно считать точным). В режиме измерения токов «падение напряжения» при максимальном значении измеряемой величины составляет ровно 0,2 В. Сопротивление 1 кОм — это ровно 1000 Ом, 1 МОм — ровно 1 миллион Ом.

Пожалуйста, не подключайте прибор к батарейке напрямую в режиме измерения токов — прибор будет испорчен. Не подключайте диод напрямую к батарейке — последовательно с диодом должен быть подключён какой-нибудь из выданных Вам резисторов!

9.2. Измерение массы пластмассовой пружинки.

Задание. Измерить массу пластмассовой пружинки.

Оборудование. Пластмассовая пружинка с большим числом витков и не очень большой жесткостью, монета номиналом 1 рубль — её масса известна и составляет ровно 3,3 г, миллиметровая бумага, мерная лента, липкая лента — по мере необходимости.

Нужно придумать способ и провести измерения, используя выданное скудное оборудование. Постарайтесь получить результат с максимально возможной точностью.

Решение. Сама пружинка может служить и грузом, и пружиной для измерений. Сначала следует пересчитать все витки пружины, сделать отметку на её середине (или в других точках, делящих пружину в определённых пропорциях) и измерить начальную длину недеформированной пружины. Затем пружина одним концом крепится на штативе так, чтобы её ось заняла вертикальное положение, когда пружина свободно висит в положении равновесия. Нужно убедиться, что свойства пружины примерно одинаковы вдоль всей её длины. Для этого измеряются удлинения верхней и нижней половин пружины. После этого концы пружины меняются местами и вновь измеряются удлинения верхней и нижней половин пружины. Закрепив пружину не за её конец, а в некоторой другой точке, можно убедиться, что удлинение какой-то части пружины (например, половины общего количества витков) пропорционально числу витков, закреплённых под этой частью снизу.

Затем к нижним виткам пружины липкой лентой крепится монета. Снова измеряется удлинение верхней половины пружины. Удлинение под действием монеты известной массы соответствует удлинению этого же участка пружины под действием некоторого количества прикреплённых снизу витков пружины. Отсюда можно вычислить полную массу пружины.

10 класс

10.1. Измерение ёмкости конденсатора.

Задание. Измерить ёмкость электролитического конденсатора.

Оборудование. Конденсатор большой ёмкости, подключённый к зажимному устройству (конденсатор полярный, его «минусовый» вывод подключён с краю), батарейка (напряжением приблизительно 4,5 В), мультиметр стрелочный, секундомер, резистор с известным сопротивлением 152 кОм, провода.

Нужно измерить с максимально возможной точностью ёмкость выданного конденсатора. Ток полного отклонения прибора в режиме измерения напряжений 50 мкА, его сопротивление в режиме измерения напряжений 20 кОм/В. Класс точности прибора принять равным 1,5%.

Указание. Способ решения очевиден: нужно заряжать и разряжать конденсатор от батарейки через резистор с известным сопротивлением.

10.2. Измерение атмосферного давления.

Задание. Измерить атмосферное давление в помещении кафедры физики МИОО, в котором проходит экспериментальный тур.

Оборудование. Термометр, тонкая стеклянная трубка длиной 15 см с постоянным внутренним сечением, открытая с одного конца и соединённая с полым стеклянным шариком с другого конца, пластиковая гибкая трубка длиной 1 м с внутренним сечением, которое немного меньше внешнего сечения стеклянной трубки, пластиковая ёмкость для воды, мерная лента, горячая вода (по требованию), липкая лента — по мере необходимости.

Нужно придумать способ и измерить давление атмосферного воздуха в помещении с максимально возможной точностью.

Решение. Предполагавшийся ход решения задачи таков.

Часть 1. В горячей (83 °C) воде нагревается стеклянный шарик, а затем открытый конец стеклянной трубки опускается под воду. В результате охлаждения трубки и воздуха внутри неё до комнатной температуры (23 °C) в трубку втягивается вода. Размеры трубки и шарика были такими, что стеклянная трубка почти целиком (на 150 мм) заполнялась водой, а в шарик вода не попадала. Этот эксперимент позволяет установить отношение внутренних объёмов шарика V_1 и цилиндрической части стеклянной трубки V_2:

$$(V_1 + V_2)T_{\text{комн}} = V_1(T_{\text{комн}} + 60^\circ); \quad \frac{V_1}{V_2} \approx 5.$$

Часть 2. С помощью нагрева и охлаждения шарика можно поместить небольшой столбик воды внутрь цилиндрической части стеклянной трубочки. Он отделяет воздух внутри шарика и трубочки от воздуха снаружи. Начальный объём воздуха, отделённого водяным поршнем, равен

$$V_0 = \left(V_1 + \frac{l}{L}V_2\right).$$

Здесь L — вся длина цилиндрического участка стеклянной трубки, а l — длина цилиндрической части, заполненной воздухом и примыкающей к шарику.

Получившееся устройство можно использовать как часть установки для измерения давления. Вторая часть установки изготавливается из пластиковой трубки и воды. Пластиковую трубочку следовало расположить горизонтально и заполнить водой примерно на половину длины.

Вода должна была находиться в средней части трубки, а остальная часть трубки (вблизи её двух открытых концов) должна была остаться пустой (заполненной воздухом). Длина столбика воды в пластиковой трубке измеряется с помощью миллиметровки или линейки. Затем одним концом эту пластиковую трубку нужно соединить с открытым концом стеклянной трубочки, в которой уже находится разделительный столбик воды.

Если пластиковую трубку привести в вертикальное положение, то можно увеличить или уменьшить давление воздуха в стеклянном шарике. Дополнительное давление, созданное в трубке столбом воды длиной h, равно $\rho g h$. Температура воздуха внутри шарика остаётся постоянной, поэтому давление P и объём V запертого водяной пробкой воздуха связаны соотношением $PV = \text{const}$. Измерив перемещение разделительного столбика воды в стеклянной трубочке x, можно найти давление воздуха P_0 в комнате:

$$\left(V_1 + \frac{l}{L}V_2\right)P_0 = \left(V_1 + \frac{l-x}{L}V_2\right)(P_0 + \rho g h).$$

Следует провести несколько измерений, располагая пластиковую трубку по-разному (горизонтально, вертикально с увеличением давления внутри стеклянного шарика, вертикально с уменьшением давления внутри стеклянного шарика). Эти несколько измерений позволяют вычислить давление воздуха в комнате и определить погрешности измерения.

11 класс

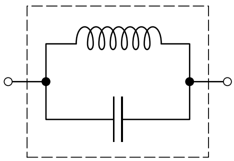
11.1. Исследование «чёрного ящика».

Задание. Определить схему соединения элементов внутри «чёрного ящика», измерить параметры этих элементов.

Оборудование. «Чёрный ящик», генератор низкой частоты, миллиамперметр переменного тока, резистор 1 кОм, провода.

В «ящике» содержатся два элемента — нужно определить тип этих элементов, схему их соединения, измерить с максимально высокой точностью их параметры. Миллиамперметр имеет два предела измерений — 5 и 50 мА, он хорошо работает на тех частотах, которые обеспечивает генератор, он содержит диодный выпрямитель, «падение напряжения» на миллиамперметре при максимальном отклонении стрелки прибора составляет примерно 0,6 В.

Решение. В ящике находились индуктивность и ёмкость, включённые параллельно друг другу.



Если включить последовательно генератор, резистор, «чёрный ящик» и миллиамперметр и плавно изменять частоту, на которой работает генератор, то на частоте около 10 кГц можно было обнаружить «падение» показаний миллиамперметра в узкой полосе частот. Это соответствует резонансу колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и конденсатора. При этом общее сопротивление последовательной цепи становится очень большим, что соответствует параллельному соединению конденсатора и катушки индуктивности внутри «чёрного ящика».

Поскольку элементов внутри ящика всего два, можно убедиться в том, что там действительно конденсатор и катушка индуктивности. Для этого собираем схему, в которой последовательно соединены генератор, «чёрный ящик» и измерительный прибор. При достаточном удалении по частоте от резонанса как вниз, так и вверх показания прибора растут вплоть до его «зашкаливания». Это соответствует тому, что суммарный импеданс «чёрного ящика» убывает и на низких, и на высоких частотах.

Чтобы проверить, насколько «хорош» генератор (в том смысле, насколько мало его внутреннее сопротивление), соберём схему, в которой «чёрный ящик» последовательно с миллиамперметром подключён к генератору. Выберем частоту, при которой показание прибора составит примерно полную его шкалу и при дальнейшем удалении от резонанса продолжает расти. Для этого нужно уйти от резонанса либо вверх, либо вниз. Затем подключим к выводам генератора резистор 1 кОм. Если показание прибора изменилось мало, значит, его сопротивление значительно меньше сопротивления резистора, то есть генератор достаточно хорош.

Теперь подключим этот же резистор параллельно измерительному прибору. Если его показание изменится мало, значит, его внутреннее сопротивление значительно меньше сопротивления резистора, что тоже говорит о качестве прибора.

При изменении частоты генератора вблизи резонанса вверх и вниз можно добиться того, чтобы миллиамперметр показывал максимальное значение тока I_1, которое определяется параметрами «чёрного ящика» (сопротивлениями генератора и миллиамперметра пренебрегаем). После этого включаем в цепь последовательно с «чёрным ящиком» и генератором ещё и резистор. По изменению показаний прибора I_2 можно вычислить реактивное сопротивление «чёрного ящика» на соответствующей частоте. Это позволит найти величины ёмкости и индуктивности, сравнив их импедансы с сопротивлением резистора. Точные формулы для токов с учётом малости сопротивлений прибора и генератора таковы:

$$I_2 = \frac{U_0}{\sqrt{\dfrac{L/C}{\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2} + R^2}}, \quad I_1 = \frac{U_0}{\sqrt{\dfrac{L/C}{\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}}.$$

Если считать, что выше частоты резонанса основной вклад в импеданс даёт конденсатор, а для низких частот основную роль играет индуктивность, то эти формулы будут выглядеть значительно проще:

$$I_2 = \frac{U_0}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}, \qquad I_1 = \frac{U_0}{\omega L}, \qquad \omega \ll \omega_{\text{рез}},$$

$$I_2 = \frac{U_0}{\sqrt{\dfrac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}}, \qquad I_1 = \omega C U_0, \qquad \omega \gg \omega_{\text{рез}}.$$

11.2. Исследование колебаний линейки, закреплённой одним концом.

Задание. Исследовать колебания линейки, закреплённой одним концом.

Оборудование. Пластиковая цветная линейка длиной 42 см — объект изучения, штатив с плоским чугунным основанием, струбцина, прокладка (брусок из алюминия), вторая линейка длиной 40 см, тонкая и прочная капроновая нить с бусинкой массой $m = 0{,}34$ г, груз с крючком и с резиновым кольцом (кольцо предназначено для закрепления нити), динамометр школьный (пределы измерения до 4 Н).

П.1. Теоретическая часть задания. Рассчитать частоту колебаний бусинки, закреплённой на нити, которая растянута с силой $T \gg mg$. Концы нити жёстко закреплены. От концов нити до бусинки расстояния L_1 и L_2. Бусинка смещается в направлении, перпендикулярном равновесному положению нити, и отпускается.

П.2. Экспериментальная часть задания. Штатив уложить «набок». Используя книги в качестве опоры, добиться вертикального расположения чугунного основания. Объект изучения (цветную линейку) с помощью струбцины закрепить горизонтально между прокладкой и чугунным основанием так, чтобы свободной оказалась часть линейки длиной L (от 25 до 7 см). Измерить зависимость частоты колебаний линейки от длины L её свободной части с помощью измерительной системы из нитки, бусинки, груза.

Решение. Первая (теоретическая) часть работы была успешно выполнена всеми участниками III тура. Все нашли зависимость собственной частоты колебаний системы из нитей и бусинки от данных в условии параметров:

$$\omega = \sqrt{\frac{F(L_2 + L_1)}{mL_2L_1}}.$$

Условие экспериментальной части задачи предполагало вполне определённый способ закрепления линейки с помощью штатива и струбцины: плоскость линейки в положении равновесия была вертикальной, при этом линейка была вытянута в длину горизонтально.

Свободные колебания линейки возбуждались вручную ударом по линейке или путём выведения её из положения равновесия и отпускания.

Для измерения частоты колебаний линейки на линейку вблизи места её зажима струбциной крепится один из концов нити колебательной системы, предназначенной для измерения частоты. Такое место крепления обеспечивает слабую связь колебательных систем (линейки и бусинки на нитке), то есть нитка с бусинкой не сильно влияет на собственные колебания линейки. При возбуждении колебаний линейки возбуждаются и колебания бусинки. Вблизи резонанса колебания бусинки имеют достаточно большую амплитуду, чтобы зафиксировать наличие этих колебаний и подобрать параметры измерительной системы для получения резонанса. Подбор осуществлялся изменением длин свободных участков нити и изменением силы натяжения нити. Резонанс фиксировался визуально, при этом точность подбора параметров (длины участков нити) не превышала 2 см при длине соответствующего участка нити около 20 см, то есть погрешность измерения частоты была не меньше 5%.

На основании проведённых измерений следовало построить график зависимости частоты собственных колебаний линейки от длины её свободной части.

Квадрат угловой частоты колебаний обратно пропорционален кубу длины свободной части линейки. Это легко обосновать: при фиксированном изгибе линейки вблизи места её закрепления создаётся определённый момент сил, пропорциональный углу изгиба линейки. Этот момент сил обеспечивает движение с угловым ускорением участка линейки, масса которого пропорциональна длине участка. Момент инерции этого участка пропорционален, соответственно, кубу длины этого участка:

$$K\varphi = -\ddot{\varphi}AL^3 \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{Al^3}.$$

Вторую (экспериментальную) часть задачи участники III тура выполнили менее успешно. Скорее всего, это связано с тем, что методика настройки измерительной колебательной системы не была явно описана в условии задачи, а на придумывание собственной методики требовалось время.

Оглавление