

Московская городская математическая олимпиада 1994 года

9 класс

1. Существует ли невыпуклый пятиугольник, никакие две из пяти диагоналей которого не имеют общих точек (кроме вершин)?
2. У Коли есть отрезок длины k , а у Лёвы есть отрезок длины l . Сначала Коля делит свой отрезок на три части, а потом Лёва делит на три части свой отрезок. Если из получившихся шести отрезков можно сложить два треугольника, то выигрывает Лёва, а если нет — Коля. Кто из играющих, в зависимости от отношения k/l , может обеспечить себе победу, и как ему следует играть?
3. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$ имеет бесконечное число решений в целых числах x, y, z .
4. Две окружности пересекаются в точках A и B . В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N . Прямые BM и BN пересекают окружности еще раз в точках P и Q (P — на прямой BM , Q — на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.
5. Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулем, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.
6. В квадрате клетчатой бумаги 10×10 нужно расставить один корабль 1×4 , два — 1×3 , три — 1×2 и четыре — 1×1 . Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что
 - а) если расставлять их в указанном выше порядке (начиная с больших), то этот процесс всегда удается довести до конца, даже если в каждый момент заботиться только об очередном корабле, не думая о будущих;
 - б) если расставлять их в обратном порядке (начиная с малых), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).

Московская городская математическая олимпиада 1994 года

8 класс

1. Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного — ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется).
2. Ученик не заметил знак умножения между двумя трехзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.
3. В треугольнике ABC провели биссектрисы углов A и C . Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на эти биссектрисы. Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AC .
4. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.
5. Придворный астролог называет момент времени хорошим, если часовая, минутная и секундная стрелки часов находятся по одну сторону от какого-нибудь диаметра циферблата. (Стрелки вращаются на общей оси и не делают скачков.) Какого времени в сутках больше, хорошего или плохого?
6. Двое играют на доске 19×94 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре, и как надо играть?