Статистика решения задач

6 класс (635 работ)

Баллы	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	322	433	367	557	398	262
1	59	58	166	29	26	130
2	183	103	27	4	0	21
3	42	9	30	3	0	175
4	29	32	45	1	0	10
5	—	—	—	41	0	8
6	—	—	—	—	0	6
7	—	—	—	—	211	4
8	—	—	—	—	—	19

7 класс (603 работы)

Баллы	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	166	48	166	461	513	599
1	0	95	0	77	3	0
2	10	153	0	3	52	0
3	9	4	9	1	9	0
4	418	194	2	8	19	0
5	—	1	426	3	4	1
6	—	108	—	5	2	0
7	—	—	—	3	1	0
8	—	—	—	42	0	0
9	—	—	—	—	—	3

8 класс (645 работ)

Оценки	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	58	246	116	196	110	163
–	144	89	455	253	432	457
–.	0	0	7	3	3	1
∓	42	13	5	169	74	5
+/2	0	0	2	0	10	1
±	59	0	3	3	15	3
+.	2	1	0	0	0	2
+	340	296	57	21	1	13

9 класс (551 работа)

Оценки	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	42	111	165	92	291	270
–	96	104	283	322	248	177
–.	1	0	6	21	0	4
∓	28	2	29	100	1	8
+/2	18	1	2	9	0	0
±	32	5	1	3	0	11
+.	4	2	3	0	0	7
+	330	326	62	4	11	74

10 класс (678 работ)

Оценки	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	76	461	341	326	304	468
–	266	145	170	320	319	209
–.	2	2	93	1	9	0
∓	130	16	59	9	31	0
+/2	2	0	2	0	2	0
±	21	26	2	1	6	0
+.	2	2	8	0	2	0
+	179	26	3	21	5	0
+!	0	0	0	0	0	1

11 класс (359 работ)

Оценки	Задачи						
	1	2	3	4	5	6	7
0	35	216	238	127	170	222	272
–	108	98	95	210	152	135	59
–.	8	7	5	5	20	1	27
∓	38	2	0	5	7	0	1
+/2	3	3	1	1	5	0	0
±	1	16	9	2	3	0	0
+.	2	0	2	2	0	1	0
+	164	17	9	7	1	0	0
+!	0	0	0	0	1	0	0

Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Дом научно-технического творчества молодёжи
Московский центр непрерывного математического образования

LXVI

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Проведение олимпиады
поддержано компьютерным
супермаркетом «НИКС»

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва — 2003

Расписание мероприятий 16 марта 2003 года

Время	Мероприятие	Место проведения			
		8 класс	9 класс	10 класс	11 класс
13^{00}	Разбор задач	01	02	16–10	16–24
14^{00}	Показ работ и аппеляция	12–05 12–06 12–07	14–02 14–03 14–04	13-й этаж	16-й этаж
15^{00}	Лекция	01			
17^{00}	Торжественное закрытие и награждение победителей	ДК МГУ (Главное здание)			

Награждение наградами награждённых, не награждённых наградами на награждении будет происходить по средам с 16^{00} до 18^{00} в МЦНМО (Бол. Власьевский пер., 11, ст. м. «Кропоткинская» или «Смоленская»; http://www.mccme.ru/, mmo@mccme.ru, тел. 241 12 37).

Сборник подготовили

В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, И. И. Богданов, Т. И. Голенищева-Кутузова, Г. Г. Гусев, С. А. ДорИченко, А. В. Елагин, А. А. Заславский, Д. А. Калинин, Т. В. Караваева, В. А. Клепцын, А. В. Клименко, П. А. Кожевников, Г. А. Колюцкий, Е. В. Корицкая, Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарёв, И. В. Межиров, П. И. Митричев, Ю. Л. Притыкин, В. М. Рычёв, В. А. Сендеров, А. В. Спивак, А. В. Хачатурян, Р. М. Фёдоров, Б. Р. Френкин, А. С. Чеботарёв, Г. Р. Челноков, А. А. Чернов, И. В. Ященко.

Рисунки выполнили

А. В. Клименко, И. В. Межиров, П. И. Митричев, М. Ю. Панов, В. Ю. Радионов.

LXVI Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения.

Редакторы *Р. М. Фёдоров, А. С. Чеботарёв.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 11/III 2003 года.
Формат бумаги 60×88 1/16. Объём 1,5 печ. л. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Гарнитура обыкновенная новая. Тираж 3000 экз. Заказ 837.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

1. Один мальчик 16 февраля 2003 года сказал: «Разность между числами прожитых мной месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111». Когда он родился? (*С. И. Токарев*)

2. Найдите наименьшее четырёхзначное число СЕЕМ, для которого существует решение ребуса

МЫ+РОЖЬ=СЕЕМ.

(Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.) (*С. И. Токарев, А. В. Хачатурян*)

3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий? (*С. И. Токарев*)

4. Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых — целое число метров. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника — тоже целое число метров? (*А. В. Спивак*)

5. В распоряжении юного паркетчика имеются 10 одинаковых плиток, каждая из которых состоит из четырёх квадратов и имеет форму буквы «Г» (все плитки ориентированы одинаково). Может ли он составить из них прямоугольник размером 5×8? (Плитки можно поворачивать, но нельзя переворачивать. Например, на рис. 1 изображено неверное решение: заштрихованная плитка неправильно ориентирована.) (*А. В. Спивак*)

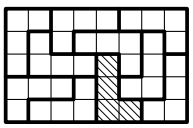

Рис. 1

6. На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй — 15. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3? (*А. А. Кустарёв*)

7 КЛАСС

1. Расставьте скобки и знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6009} = 2003.$$

(*Т. И. Голенищева-Кутузова, И. В. Ященко*)

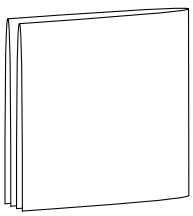

Рис. 2

2. Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам ещё раз (рис. 2). Получившийся квадратик разрезали ножницами (по прямой). Могла ли салфетка распасться а) на две части? б) на три части? в) на четыре части? г) на пять частей? Если да — нарисуйте такой разрез. (*А. С. Чеботарёв*)

3. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем

троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф. (*О. Н. Карпенков*)

4. Прямоугольник разрезали шестью вертикальными и шестью горизонтальными разрезами на 49 прямоугольников (рис. 3). Оказалось, что периметр каждого из получившихся прямоугольников — целое число метров. Обязательно ли периметр исходного прямоугольника — целое число метров?

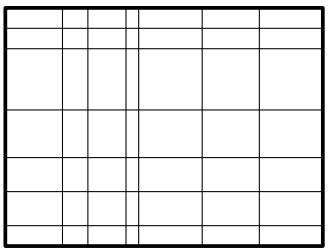

Рис. 3

(*В. В. Произволов*)

5. В честь праздника 1% солдат в полку получили новое обмундирование. Солдаты расставлены в виде прямоугольника так, что солдаты в новом обмундировании оказались не менее чем в 30% колонн и не менее чем в 40% шеренг. Какое наименьшее число солдат могло быть в полку? (*Р. М. Фёдоров*)

6. Куб размером $3\times3\times3$ состоит из 27 единичных кубиков. Можно ли побывать в каждом кубике по одному разу, двигаясь следующим образом: из кубика можно пройти в любой кубик, имеющий с ним общую грань, причём запрещено ходить два раза подряд в одном направлении?

(*Ю. Игнатов*)

8 КЛАСС

1. В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, общий доход всей семьи возрастёт на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату — на 15%, если же зарплату удвоят папе — на 25%. На сколько процентов возрастёт доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

(*Л. И. Звавич, А. С. Чеботарёв*)

2. Придумайте десятизначное число, в записи которого нет нулей, такое что при прибавлении к нему произведения его цифр получается число с таким же произведением цифр. (*А. В. Хачатурян*)

3. Можно ли покрасить некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 5 закрашенных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 (вертикальном или горизонтальном) — ровно 4 закрашенные клетки? (*П. Е. Пушкарь*)

4. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты, соответственно, точки X и Y такие, что $\angle ABX=\angle YAC$, $\angle AYB=\angle BXC$, $XC=YB$. Найдите углы треугольника ABC. (*Т. В. Караваева*)

5. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полёты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране? (*Р. М. Фёдоров*)

6. Боря задумал целое число большее чем 100. Кира называет целое число большее чем 1. Если Борино число делится на это число, Кира выиграла, иначе Боря вычитает из своего числа названное, и Кира называет следующее число. Ей запрещается повторять числа, названные ранее.

Если Борино число станет отрицательным — Кира проигрывает. Есть ли у неё выигрышная стратегия? (*А. С. Чеботарёв*)

9 КЛАСС

1. Хулиганы Джей и Боб на уроке черчения нарисовали головастиков (четыре окружности на рис. 4 — одного радиуса, треугольник — равносторонний, горизонтальная сторона этого треугольника — диаметр окружности). Какой из головастиков имеет бóльшую площадь? (*Р. М. Фёдоров*)

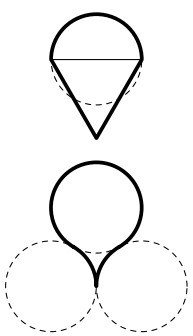

Рис. 4

2. Произведение пяти чисел не равно нулю. Каждое из этих чисел уменьшили на единицу, при этом их произведение не изменилось. Приведите пример таких чисел. (*Д. А. Калинин*)

3. В магазине три этажа, перемещаться между которыми можно только на лифте. Исследование посещаемости этажей магазина показало, что с начала рабочего дня и до закрытия магазина:

— из покупателей, входящих в лифт на втором этаже, половина едет на первый этаж, а половина — на третий;

— среди покупателей, выходящих из лифта, меньше трети делает это на третьем этаже.

На какой этаж покупатели чаще ездили с первого этажа, на второй или на третий? (*А. С. Чеботарёв*)

4. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделённая бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок — треугольник со стороной 1, — победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре? (*А. В. Хачатурян*)

5. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Пусть K — середина дуги BC, не содержащей точку A; N — середина отрезка AC, M — точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle EMK = 90^\circ$. (*И. Ф. Шарыгин*)

6. В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включённой, так и выключенной.

Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ — скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним».

Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение. (*Фольклор*)

10 КЛАСС

1. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что у каждого из уравнений $ax^2+bx+c=0$, $ax^2+bx-c=0$, $ax^2-bx+c=0$, $ax^2-bx-c=0$ оба корня — целые? (*В. А. Клепцын*)

2. По рёбрам выпуклого многогранника с 2003 вершинами проведена замкнутая ломаная, проходящая через каждую вершину ровно один раз. Докажите, что в каждой из частей, на которые эта ломаная делит поверхность многогранника, количество граней с нечётным числом сторон нечётно. (*А. А. Заславский*)

3. Пусть $P(x)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1, а последовательность целых чисел a_1, a_2, ... такова, что $P(a_1)=0$, $P(a_2)=a_1$, $P(a_3)=a_2$ и т. д. Числа в последовательности не повторяются. Какую степень может иметь $P(x)$? (*Б. Р. Френкин*)

4. Пусть M — точка пересечения медиан в $\triangle ABC$. На перпендикулярах, опущенных из M на стороны BC, AC и AB, взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно, причём $A_1B_1 \perp MC$ и $A_1C_1 \perp MB$. Докажите, что M является точкой пересечения медиан и в $\triangle A_1B_1C_1$. (*А. А. Заславский*)

5. В стране несколько городов, соединённых дорогами с односторонним и двусторонним движением. Известно, что из каждого города в любой другой можно проехать ровно одним путём, не проходящим два раза через один и тот же город. Докажите, что страну можно разделить на три губернии так, чтобы ни одна дорога не соединяла два города из одной губернии. (*А. В. Спивак, И. В. Межиров*)

6. Дана бесконечная последовательность многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... Всегда ли существует конечный набор функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_N(x)$, композициями которых можно записать любой из них (например, $P_1(x)=f_2(f_1(f_2(x)))$)? (*А. С. Чеботарёв*)

11 КЛАСС

1. Для положительных чисел x, y, z выполнено равенство

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}=\frac{x^2}{z}+\frac{z^2}{y}+\frac{y^2}{x}.$$

Докажите, что хотя бы два из чисел x, y, z равны между собой. (*Фольклор*)

2. Дан многочлен $P(x)$ степени 2003 с действительными коэффициентами, причём старший коэффициент равен 1. Имеется бесконечная последовательность целых чисел a_1, a_2, ..., такая что $P(a_1)=0$, $P(a_2)=a_1$, $P(a_3)=a_2$ и т. д. Докажите, что не все числа в последовательности a_1, a_2, ... различны. (*Б. Р. Френкин*)

3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Точки P и Q симметричны точке C относительно прямых AB и AD соответственно. Докажите, что прямая PQ проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) H треугольника ABD. (*А. А. Заславский*)

4. По периметру круглого торта диаметром n/π метров расположены n вишенок. Если на концах некоторой дуги находятся вишенки, то количество остальных вишенок на этой дуге меньше, чем длина дуги в метрах.

Докажите, что торт можно разрезать на n равных секторов так, что в каждом куске будет по вишенке. (*Г. Р. Челноков*)

5. У выпуклого многогранника внутренний двугранный угол при каждом ребре острый. Сколько может быть граней у многогранника? (*О. К. Подлипский, А. А. Заславский*)

6. На берегу круглого острова Гдетотам расположено 20 деревень, в каждой живёт по 20 борцов. Был проведён турнир, в котором каждый борец встретился со всеми борцами из всех других деревень. Деревня A считается сильнее деревни $Б$, если хотя бы k поединков между борцами из этих деревень заканчивается победой борца из деревни A. Выяснилось, что каждая деревня сильнее следующей за ней по часовой стрелке. Какое наибольшее значение может иметь k? (У всех борцов разная сила, и в поединке всегда побеждает сильнейший.) (*И. И. Богданов*)

7. Дано равенство $(a^{m_1}-1)\ldots(a^{m_n}-1)=(a^{k_1}+1)\ldots(a^{k_l}+1)$, где a, n, l и все показатели степени — натуральные числа, причём $a>1$. Найдите все возможные значения числа a. (*В. А. Сендеров*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

1. Ответ: 16 января 1993 года.

Решение. Пусть мальчик прожил x лет и ещё y месяцев. Тогда он прожил всего $12x+y$ месяцев и поэтому $12x+y-x=111$, т. е. $11x+y=11\cdot10+1$. Поскольку $y<12$, то $y=1$ и $x=10$.

2. Поскольку $\mathsf{C}>\mathsf{P}$, то $\mathsf{C}>1$. Так как мы ищем наименьшее число, попробуем взять $\mathsf{P}=1$, $\mathsf{C}=2$ и $\mathsf{E}=0$. Тогда $\mathsf{M}\geqslant3$. Случай $\mathsf{CEEM}=2003$ возможен: $35+1968=2003$ или $38+1965=2003$.

3. Ответ: один.

Решение. Если первый — рыцарь, то в силу его слов второй и третий — лжецы, что невозможно из-за высказывания второго островитянина. Значит, первый — лжец. Если второй — лжец, то в силу его слов третий тоже лжец, но тогда первый сказал правду, а он должен был соврать. Значит, второй — рыцарь. В силу его слов третий тоже рыцарь. Третий честно ответит: «Один».

4. Ответ: нет.

Решение. Например, квадрат со стороной 2/3 можно разрезать средней линией на два прямоугольника, периметры которых равны 2 (рис. 5, *а*). Есть и другие примеры (рис. 5, *б*).

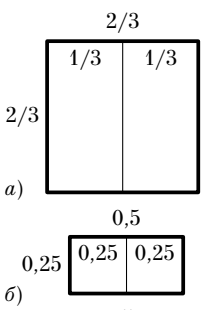

Рис. 5

5. Ответ: да, можно (рис. 6).

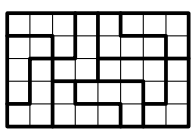
Рис. 6

6. Ответ: 6.

Решение. Если явно выписать все возможные сочетания чисел, которые могли бы оказаться на боковых гранях при бросании такого кубика (а таких сочетаний всего 15), то можно заметить, что и 12, и 15 в сумме набирается ровно двумя способами: $12=1+2+3+6=1+2+4+5$, $15=2+3+4+6=1+3+5+6$.

Легко заметить, что если бы 12 «выпало», как 1+2+3+6, то при втором броске 15 получить было бы невозможно, так как на двух противоположных гранях было бы 4 и 5, а сочетания с суммой 15, содержащего оба эти числа нет.

Значит, 12 «выпало» как 1+2+4+5. Следовательно, напротив тройки написана шестёрка.

Стоит ещё показать, что такой кубик вообще существует. Например, годится кубик на котором на противоположных гранях написаны числа 1 и 5, 2 и 4, 3 и 6 соответственно.

Второе решение. Заметим, что сумма всех чисел, написанных на кубике, равна 21. Сумма чисел на верхней и нижней грани в первом и втором случаях равна 9 и 6 соответственно.

После первого броска понятно, что либо 3 напротив 6, либо 4 напротив 5. Предположим, что 4 напротив 5. Но после второго броска ясно, что либо 1 напротив 5, либо 2 напротив 4. Противоречие, следовательно, 3 напротив 6.

7 КЛАСС

1. Ответ: $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right):\frac{1}{6009}=2003$.

2. Ответ: во всех пунктах можно. На рис. 7, *а*—*г* изображены все возможные варианты разрезания салфетки.

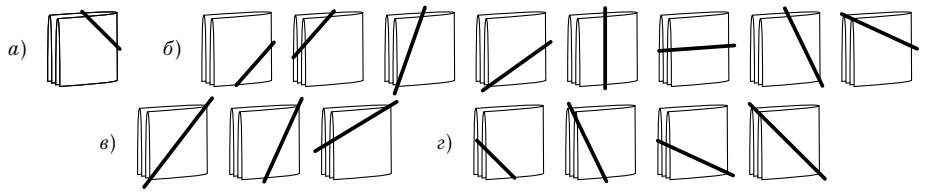

Рис. 7

3. Ответ: 2222232.

Решение. Так как двоек больше, чем троек, двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр — 17, во втором — 16, в третьем — 15, а в последнем — 14. По признаку делимости на 3 число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Значит, годится только третий вариант.

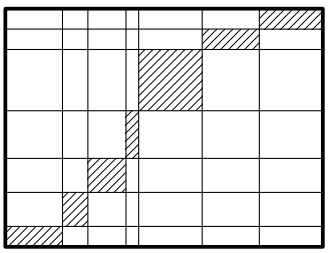

Рис. 8

Итак, в коде шесть двоек и одна тройка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, должно делиться на 4. Значит, это 32.

4. Рассмотрим прямоугольники, заштрихованные на рис. 8 («диагональные»). Горизонтальная сторона исходного прямоугольника складывается из их горизонтальных сторон. То же — для вертикальной стороны.

Поэтому периметр исходного прямоугольника равен сумме периметров заштрихованных прямоугольников. Периметр каждого из этих прямоугольников — целое число метров. Их сумма — тоже целое число метров.

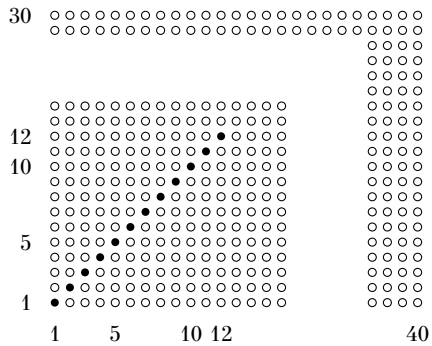

Рис. 9

5. Ответ: 1200.

Решение. Предположим, что солдаты поставлены в m колонн и n шеренг. Тогда в полку mn солдат и $mn/100$ солдат получили новое обмундирование. Согласно условию, не менее чем в $40n/100$ шеренгах есть хотя бы по одному солдату в новом обмундировании, значит, $mn/100 \geqslant 40n/100$. Отсюда ясно, что $m \geqslant 40$. Аналогично, так как не менее чем в $30m/100$ колоннах есть солдаты в новом обмундировании, $mn/100 \geqslant 30m/100$. Поэтому $n \geqslant 30$. Значит, в полку не менее, чем $40 \cdot 30 = 1200$ солдат.

Покажем, что 1200 солдат можно построить таким образом. Построим их в виде прямоугольника 30×40. Поставим по диагонали 12 солдат в новом обмундировании (рис. 9). Ясно, что солдаты в новом обмундировании стоят ровно в 30% колонн и в 40% шеренг (30% от 40 — это 12, 40% от 30 — тоже 12).

6. Ответ: нельзя.

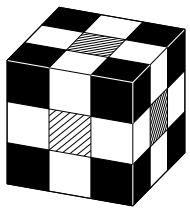
Рис. 10

Решение. Предположим, что можно. В кубе восемь угловых кубиков (на рис. 10 они покрашены в чёрный цвет) и шесть «центральных» кубиков (они расположены в центрах граней и заштрихованы на рис. 10). Нетрудно видеть, что любой ход из углового кубика ведёт в кубик в середине ребра, а следующий ход — в «центральный» кубик. Таким образом, чтобы попасть из одного углового кубика в другой, придётся пройти хотя бы через один «центральный». Иными словами, между каждыми двумя соседними (в порядке обхода) угловыми кубиками должен встретиться хотя бы один «центральный». Значит, «центральных» кубиков не меньше семи, а их всего лишь шесть!

8 КЛАСС

1. Ответ: 55%.

Решение. Если Маше удвоят стипендию, семейный доход возрастёт на размер этой стипендии. Следовательно, Машина стипендия составляет 5% общего дохода. Аналогично, мамина зарплата составляет 15%, а папина — 25%. Оставшаяся доля $100\% - 5\% - 15\% - 25\% = 55\%$ приходится на дедушкину пенсию. Значит, если ему удвоят пенсию, доход всей семьи возрастёт на 55%.

Это же решение можно сформулировать по-другому. Если бы всем членам семьи вдруг стали платить вдвое больше, общий доход увеличился

бы на 100%. Из этих 100 процентов 5 приходится на Машу, 15 — на маму, 25 — на папу, а остальные 55 — на дедушку.

2. Ответ: например, 1111111613.

Решение. Сперва найдём какое-нибудь число, удовлетворяющее условию задачи, не обязательно десятизначное. Например, попробуем найти такое число, что после прибавления к нему произведения цифр они попросту меняются местами. Если последние цифры числа — 13, то, чтобы поменять их местами, нужно прибавить 18. Чтобы произведение цифр было 18, нужно дописать ещё цифру 6. Искомым является число 613: $613+6\cdot1\cdot3=631$. Другие аналогичные числа: $326+3\cdot2\cdot6=362$, $819+8\cdot1\cdot9=891$ и т. п.

В наименьшем известном примере — $28+2\cdot8=44$ — цифры изменяются, однако их произведение сохраняется! Другой пример: $214+2\cdot1\cdot4=222$.

Теперь, чтобы получить десятизначное число, припишем слева недостающее число единиц. Произведение цифр от этого не изменится. Например, $1111111613+18=11111111631$. Также можно приписать в начало и конец равное число двоек и пятёрок, например, $5555282222+10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot16=5555442222$.

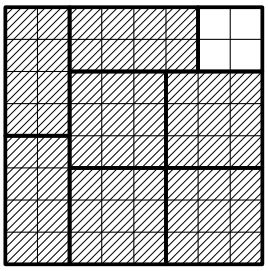

Рис. 11

Другие интересные примеры, встретившиеся в работах школьников: 1111159121, 1111954511, 1111332123, 1111113148, 2356478911, 1111553431, 1952219522, 1231451671, 3355211211, 5132486791.

3. Ответ: нельзя.

Решение. Предположим, что такая раскраска возможна. На всех рисунках не заштрихованы клетки, про которые выяснено, что они не закрашены; штриховкой обозначены клетки, про которые ещё не известно, закрашены они или нет; двойной штриховкой — заведомо закрашенные.

Доску 8×8 можно разрезать на восемь прямоугольников 4×2, поэтому на ней ровно $8\cdot4=32$ закрашенные клетки.

Также её можно разрезать на четыре квадрата 3×3, три прямоугольника 4×2 и угловой квадратик 2×2 (рис. 11). В четырёх квадратах 3×3 и трёх прямоугольниках 4×2 уже $4\cdot5+3\cdot4=32$ клетки, поэтому в угловом квадратике 2×2 не должно быть ни одной закрашенной клетки. Аналогично можно доказать, что и в остальных угловых квадратиках 2×2 нет закрашенных клеток.

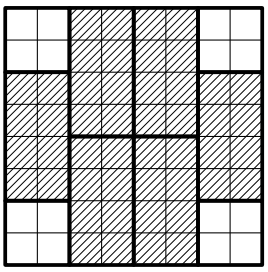

Рис. 12

Доску без угловых квадратиков 2×2 можно разрезать на шесть прямоугольников 4×2 (рис. 12). Получаем, что всего на доске $6\cdot4=24$ закрашенные клетки. Противоречие.

Примечание. Доказав, что угловые квадратики 2×2 не закрашены, можно действовать и по-другому, например, так. Разместим на доске четыре квадрата 3×3 и два прямоугольника 4×2 как показано на рис. 13. На оставшееся место приходится $32-(4\cdot5+2\cdot4)=4$ закрашенные клетки, и туда можно поместить два прямоугольника 4×2, перекрывающиеся

по квадратику 2×2. В каждом из них четыре закрашенные клетки, и вместе у них четыре закрашенных клетки — значит, закрашено их пересечение, и угловой квадратик 2×2 должен быть полностью закрашен. Противоречие.

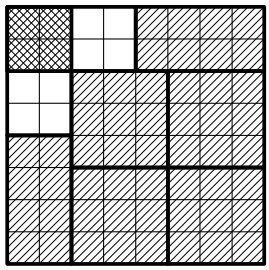

Рис. 13

Приведём ещё одно решение. Покажем, что даже доску 6×6 нельзя раскрасить указанным в задаче образом. Так как её можно разрезать на четыре квадрата 3×3, в ней должно быть ровно 4·5=20 закрашенных клеток. Разрежем её на четыре прямоугольника 4×2 и квадратик 2×2 (рис. 14). В этих прямоугольниках 4·4=16 клеток, значит в 2×2 сосредоточены остальные 20−16=4 клетки, т. е. все клетки в нём закрашены. Переложив четыре прямоугольника другим образом, можно то же самое доказать про квадратики 2×2 в других углах, а также про квадратик в центре (рис. 15). Остальные клетки должны быть незакрашенными, так как в каждом прямоугольнике 4×2 уже есть по четыре закрашенные клетки. Теперь легко указать квадрат 3×3, в котором всего четыре закрашенные клетки (рис. 16).

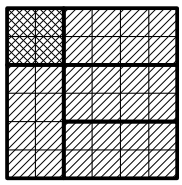

Рис. 14

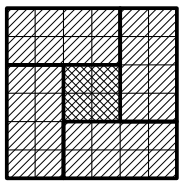

Рис. 15

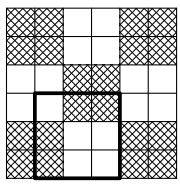

Рис. 16

4. Ответ: треугольник равносторонний, все углы по 60°.

Решение. Для внешних углов BXC и AYB треугольников ABX и CAY запишем равенства

$$\angle BXC=\angle ABX+\angle BAX,$$
$$\angle AYB=\angle CAY+\angle YCA$$

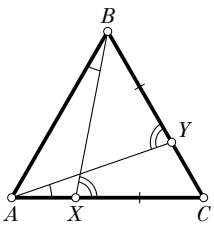

Рис. 17

(рис. 17). Так как по условию $\angle BXC=\angle AYB$, $\angle ABX=\angle CAY$, получаем, что $\angle BAX=\angle YCA$, т. е. треугольник ABC является равнобедренным, $AB=BC$.

Рассмотрим треугольники XBC и YAB. У них равны две стороны и угол не между ними: $\angle BXC=\angle AYB$, $XC=YB$, $BC=AB$. Такие треугольники либо равны, либо $\angle XBC+\angle YAB=180°$ (мы докажем это ниже), но второй случай невозможен, поскольку $\angle XBC+\angle YAB<\angle ABC+\angle CAB=180°-\angle ACB<180°$. Значит, $\triangle XBC=\triangle YAB$, а следовательно, $\angle ABC=\angle BCA$, и треугольник ABC равносторонний.

Теперь докажем сформулированный выше факт. Итак, в треугольниках XBC и YAB равны две стороны и угол не между ними: $\angle BXC=\angle AYB$, $XC=YB$, $BC=AB$. Отметим на луче XB точку B' на расстоянии $XB'=YA$.

Точка B' может оказаться как внутри, так и вне отрезка XB (рис. 18, *а*, *б*). Треугольники $XB'C$ и YAB равны по двум сторонам и углу между ними ($XC=YB$, $XB'=YA$, $\angle CXB'=\angle BYA$). Тогда $CB'=CB$. Если B и B' совпадают, треугольники XBC и YAB равны. Если же B' не совпадает с B, то в равнобедренном треугольнике $B'CB$ углы $B'BC$ и $BB'C$ равны, а значит, $\angle XBC+\angle XB'C=180°$, и $\angle XBC+\angle YAB=180°$.

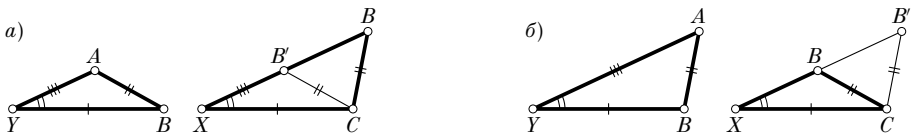

Рис. 18

5. Ответ: 21 авиалиния.

1) Докажем, что меньше, чем 21 линией не обойтись. Вначале докажем, что если 15 городов соединены авиалиниями так, что можно добраться от любого города до любого другого, то авиалиний не меньше 14.

Обозначим число авиалиний через k. Если мы уберём одну из них, города могут распасться на две разрозненные группы, между которыми нет воздушного сообщения, а могут и не распасться. После удаления следующей авиалинии не более одной группы может распасться ещё на две, количество разрозненных групп увеличится не более чем на одну. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что после удаления последней авиалинии количество разрозненных групп не может превысить $k+1$. Поскольку 15 городов без авиалиний — это 15 групп, то $k\geqslant 14$.

Обозначим количество линий у авиакомпаний через a, b и c. По доказанному, у любых двух компаний вместе не менее 14 линий, т. е. $a+b\geqslant 14$, $b+c\geqslant 14$, $c+a\geqslant 14$. Складывая эти неравенства, получаем: $2(a+b+c)\geqslant 42$, т. е. у трёх компаний в сумме не менее 21 авиалинии.

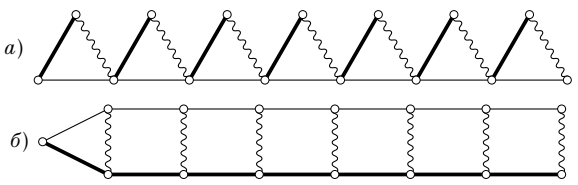

Рис. 19

2) Осталось привести пример с 21 авиалинией. Годится любой из примеров, показанных на рис. 19, *а*, *б*.

6. Ответ: есть.

Приведём стратегию игры за Киру. Сперва ей следует назвать «2». Если Боря не проиграл, то его число было нечётным. После вычитания двойки оно нечётным и останется.

Теперь Кире следует назвать «3». Чтобы понять, какие числа мы «отсеяли» этим ходом, рассмотрим возможные остатки изначального Борисного числа при делении на 6 ($6=\text{НОК}(2, 3)$). Если остаток был 0, 2 или 4,

Кира выиграла бы первым ходом. Если остаток был 5, то после первого хода он стал бы 3, и Кира выиграла бы вторым ходом. Таким образом, игра будет продолжаться, если изначальное Борино число давало остаток 1 или 3 при делении на 6. После двух ходов из него вычтется 2+3=5, и его остаток при делении на 4 станет 2 или 4.

Третье число Киры — «4». Рассмотрим возможные остатки Бориного числа перед этим ходом при делении на 12 (12=НОК(2, 3, 4)). Возможные остатки при делении на 6 — 2 или 4, а значит, при делении на 12 — 2, 4, 8 или 10. Игра будет продолжаться, если остаток был 2 или 10 (иначе разделится на 4), после вычитания 4 они превратятся соответственно в 10 и 6.

Четвёртое число Киры — «6». Если Борино число давало остаток 6 при делении на 12, оно разделится на 6, иначе после вычитания 6 останется единственный вариант — остаток 4. Кира называет «16», чтобы после вычитания 16 Борино число стало делится на 12. После этого можно называть «12», уж точно разделится!

В табл. 1 представлены ходы Киры и те числа, которые могли быть у Бори в случае, если он не проигрывает на данном ходе; k означает произвольное натуральное число (в каждой клетке таблицы, вообще говоря, своё).

Таблица 1

Ход Киры	Возможное число Бори перед её ходом	Возможное число Бори после её хода
2	любое	$2k+1$
3	$6k+1$, $6k+3$, $6k+5$	$6k+4$, $6k+2$
4	$12k+2$, $12k+4$, $12k+8$, $12k+10$	$12k+10$, $12k+6$
6	$12k+6$, $12k+10$	$12k+4$
16	$12k+4$	$12k$
12	$12k$	—

Заметим, что после пятого хода Боря мог вычесть из своего числа лишь 2+3+4+6+16=31, т. е. Борино число не могло стать отрицательным.

Посмотрим теперь на процесс игры, зная заранее, что достаточно рассматривать остатки при делении Бориного числа на 12 (табл. 2).

Таблица 2

Ход Киры	Возможные остатки от деления на 12 Бориного числа перед её ходом	Возможные остатки от деления на 12 Бориного числа после её хода
2	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	11, 1, 3, 5, 7, 9
3	1, 3, 5, 7, 9, 11	10, 2, 4, 8
4	2, 4, 8, 10	10, 6
6	6, 10	4
16	4	0
12	0	—

Таким образом, каждым ходом Кира «отсеивает» некоторые остатки. Уже перед пятым ходом становится ясно, что Борино число имеет вид $12k+4$, но приходится назвать «16», чтобы привести его к виду $12k$, а уже затем назвать «12».

Примечание. Участниками олимпиады были придуманы и другие последовательности ходов Киры. Среди них особого внимания заслуживает

последовательность с минимальной суммой чисел — 6, 4, 3, 2, 5, 12 (попробуйте доказать её минимальность самостоятельно).

9 КЛАСС

1. Ответ: площади фигур равны.

Первое решение. Пусть площадь окружности равна $S_{\text{окр}}$, а площадь равностороннего треугольника со стороной, равной диаметру окружности, равна $S_{\text{тр}}$. Так как треугольник $O_1O_2O_3$ равносторонний, его углы равны 60°, кроме того длина его стороны равна диаметрам исходных окружностей, поэтому его площадь равна $S_{\text{тр}}$. Значит, площадь каждого из заштрихованных секторов на рис. 20 равна $S_{\text{окр}}/6$, а площадь закрашенной части равна

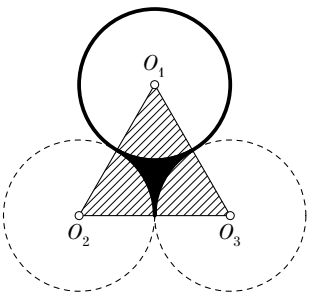

Рис. 20

$$S_{\text{тр}}-3\frac{S_{\text{окр}}}{6}=S_{\text{тр}}-\frac{S_{\text{окр}}}{2}$$

Поэтому площадь второго головастика равна

$$S_{\text{окр}}+S_{\text{тр}}-\frac{S_{\text{окр}}}{2}=S_{\text{тр}}+\frac{S_{\text{окр}}}{2}.$$

Очевидно, это совпадает с площадью второго головастика.

Идея второго решения. Наложим одного головастика на другого как показано на рис. 21. Нетрудно проверить, что если отрезать от первого головастика заштрихованные сегменты, и повернуть их вокруг точек A_1 и B_1 на 180°, то получится в точности второй головастик.

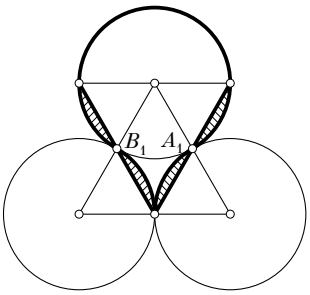

Рис. 21

2. Ответ: например, 5, 6, 7, 8, –1.

Можно построить и другой пример: пусть первые четыре числа — двойки. Получаем уравнение на пятое число x: $16x=x-1$, откуда $x=-1/15$.

3. Ответ: с первого на третий этаж за этот день приехало меньше покупателей, чем с первого на второй.

Первое решение. Предположим, что за весь день на первом этаже в лифт вошло x покупателей, на втором — y, на третьем — z. Заметим, что количество покупателей, вышедших из лифта на каждом из этажей, равно количеству покупателей, вошедших на этом же этаже.

По условию, из покупателей, вошедших на втором этаже, половина едет вниз, а половина — вверх. Значит, со второго этажа на третий едет $y/2$ покупателей, и столько же со второго на первый. Второе условие можно записать так: $z<(x+y+z)/3$. Это равносильно тому, что $2z<x+y$.

С первого этажа на третий было совершено $z-y/2$ поездок, так как всего на третьем этаже вышли из лифта z человек, а $y/2$ из них приехали со второго этажа. А с первого на второй поднимались те покупатели, входившие в лифт на первом этаже, кто не ехал на третий, т. е.

$x-(z-y/2)$. Для решения задачи требуется сравнить эти два выражения. Но неравенство $z-y/2<x-(z-y/2)$ равносильно уже доказанному неравенству $2z<x+y$. Тем самым мы доказали, что с первого этажа на третий за этот день приехало меньше покупателей, чем с первого на второй.

Второе решение. Обозначим через n_{12} количество поездок с первого этажа на второй. Аналогично определим числа n_{13}, n_{21}, n_{23}, n_{31}, n_{32}. Все поездки разобьём на три группы: поездки на третий этаж, поездки с третьего этажа и поездки между первым и вторым этажом. По условию задачи, первая группа составляет менее трети всех поездок. С другой стороны, она количественно равна второй, так как число покупателей, приехавших на третий этаж равно числу уехавших с третьего этажа. Значит, последняя группа составляет более трети всех поездок:

$$(n_{31}+n_{32})=(n_{13}+n_{23})<(n_{12}+n_{21}).$$

Подставляя в это неравенство $n_{21}=n_{23}$, получим $n_{13}<n_{12}$: с первого этажа чаще ездили на второй, нежели на третий.

4. Ответ: если число n является простым, то выигрывает второй игрок, иначе выигрывает первый игрок.

После первого хода образуется равнобедренная трапеция. Посмотрим какие фигуры образуются на последующих ходах.

Пусть на каком-то ходу один из игроков получил шоколадку в форме равнобедренной трапеции с меньшим основанием a и большим основанием b (длина боковой стороны такой трапеции равна $b-a$). Если он отломает треугольник, сторона которого меньше, чем $b-a$, то другой игрок может отломать треугольник со стороной 1, и этот игрок проигрывает (рис. 22). Следовательно, в этой ситуации он должен отломать треугольник со стороной $b-a$. После этого хода остаётся параллелограмм, длины сторон которого равны a и $b-a$.

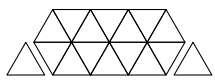

Рис. 22

Пусть игрок получил шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и b, причём $a<b$. Тогда по аналогичным соображениям он должен отломать треугольник со стороной a. После этого хода остаётся равнобедренная трапеция с основаниями $b-a$ и b.

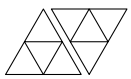

Рис. 23

Таким образом, если в некоторый момент один из игроков получил шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и b ($a<b$), то через два хода он получит шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и $b-a$.

Если же один из игроков получил параллелограмм с равными сторонами (т. е. ромб), то после его хода образуется треугольник (рис. 23).

Теперь приведём выигрышную стратегию для второго игрока при простом n. Ему достаточно каждый раз отламывать кусок наибольшего размера. Покажем, что эта стратегия приводит к выигрышу. Пусть первый игрок отломал треугольник со стороной k. После хода второго игрока образуется параллелограмм со сторонами k и $n-k$. Эти числа взаимно просты, так как n — простое число. Далее, после каждого хода второго игрока будет получаться параллелограмм (пока в конце концов не получится ромб). Длины сторон этого параллелограмма взаимно просты

(если k и n взаимно просты, то k и $n-k$ тоже взаимно просты). Значит, длины сторон ромба тоже взаимно просты. Но это означает, что получится ромб со стороной 1! Первый будет вынужден отломать от него треугольник со стороной 1, после чего второй выигрывает.

Если $n=1$, то первый уже выиграл. Пусть теперь число n составное. Обозначим через p любой простой делитель числа n. Пусть первый сначала отломает треугольник со стороной p, а потом каждый раз отламывает самый большой кусок. Через некоторое время второй игрок получит треугольник со стороной p и, как было разобрано выше, через несколько ходов проиграет.

Примечание. Заметим, что описанный процесс есть не что иное, как алгоритм Евклида.

5. Пусть точка O — центр окружности (рис. 24). Так как треугольник ABC прямоугольный, точка O совпадает с серединой гипотенузы AB. Угол NOK прямой: действительно, средняя линия NO треугольника ABC параллельна его стороне BC, а прямая OK является высотой равностороннего треугольника BOC (так как она является биссектрисой этого треугольника).

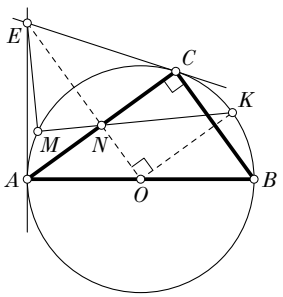

Рис. 24

Нетрудно видеть, что точки E, N и O лежат на одной прямой. Действительно, прямоугольные треугольники ECO и EAO равны по катету и гипотенузе, поэтому EO — биссектриса угла AEC. С другой стороны, треугольник AEC — равнобедренный, так как касательные, проведённые к окружности из одной точки равны. Поскольку отрезок EN — медиана в этом треугольнике, то он также является и биссектрисой. Поэтому лучи EN и EO совпадают как биссектрисы угла AEC.

Точки A, E, C и O лежат на одной окружности, так как $\angle ECO=\angle EAO=90^\circ$. Из теоремы о пересекающихся хордах окружности следует, что

$$AN\cdot NC=EN\cdot NO. \qquad (1)$$

Применяя ту же теорему к хордам AC и MK исходной окружности, получаем

$$AN\cdot NC=MN\cdot NK. \qquad (2)$$

Комбинируя (1) и (2), получаем, что

$$MN\cdot NK=EN\cdot NO.$$

По теореме, обратной к теореме о пересекающихся хордах получаем, что точки M, K, E и O лежат на одной окружности.

Углы EMK и EOK равны, как опирающиеся на одну дугу. Но угол EOK — прямой, значит, и угол EMK — прямой.

6. Узники выбирают одного определённого человека (будем называть его «счётчиком»), который будет считать узников по такой системе: если, приходя в комнату, он обнаруживает, что свет включён, то он прибавляет к уже посчитанному числу узников единицу и выключает свет, если же свет не горит, то он, ничего не меняя, возвращается обратно в свою камеру. Каждый из оставшихся узников действует по такому правилу: если,

приходя в комнату, он обнаруживает, что свет не горит, и он до этого ни разу не включал свет, то он его включает. В остальных случаях он ничего не меняет. Когда число посчитанных узников становится равным 99, «счётчик» говорит, что все узники уже побывали в комнате.

Действительно, каждый узник, кроме «счётчика», включит свет в комнате не более одного раза. Когда «счётчик» насчитает 99, он может быть уверен, что все остальные узники уже побывали в комнате хотя бы раз, кроме того он сам уже побывал в комнате. Получается, что к этому моменту все узники заведомо побывали в комнате хоть раз.

Остаётся доказать, что каждый из 99 узников включит свет. Предположим, что это не так — свет будет включён менее 99 раз. Тогда, начиная с некоторого дня n, свет включаться не будет. Так как никакой заход в комнату не будет для счётчика последним, он побывает в комнате после этого дня (например, на m-й день, $m>n$). Если свет при этом горел, он его выключит. Значит, начиная с $(m+1)$-го дня свет будет всё время выключен. Рассмотрим узника, который свет ещё ни разу не зажигал. Так как и для него никакой заход в комнату не последний, он побывает в комнате после m-го дня. Но тогда он должен включить свет — противоречие.

10 КЛАСС

1. Ответ: да, например, $a=1$, $b=5$, $c=6$.

Решение. Можно считать, что $a=1$, поскольку если x_1 и x_2 — корни уравнения ax^2+bx+c, то $b=-(x_1+x_2)a$, $c=x_1x_2a$, т. е. все коэффициенты уравнения можно сократить на a. Заметим также, что корни уравнений, отличающихся только знаком при bx, противоположны, поэтому достаточно лишь того, чтобы корни уравнений $x^2+bx+c=0$ и $x^2+bx-c=0$ были целыми.

Для того, чтобы это выполнялось, необходимо, чтобы дискриминанты этих уравнений были точными квадратами: $b^2-4c=m^2$, $b^2+4c=n^2$. Это же условие оказывается и достаточным — ведь b^2-4c той же чётности, что и b, а значит и $\sqrt{b^2-4c}$ (если этот корень целый) оказывается той же чётности. Тем самым, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$ (корни уравнения $x^2+bx+c=0$) — целые числа. Аналогично для второго уравнения.

На самом деле, таких b, c, m, n существует бесконечно много. Для решения задачи достаточно предъявить один пример таких b, c, m, n. Покажем, как такой пример можно было подобрать. Исключая c, получаем $n^2-b^2=b^2-m^2$, при этом, чтобы c было целым необходимо, чтобы b, m и n были одной чётности. Перебрав квадраты нечётных чисел от 1 до 9, находим одно из решений: $7^2-5^2=5^2-1=24$; $c=\frac{24}{4}=6$. Мы нашли b и c, такие что дискриминанты обоих уравнений — полные квадраты.

Для того, чтобы найти пример, нам потребовалось подобрать представление $2b^2$ в виде суммы m^2+n^2, отличное от b^2+b^2. Мы нашли такие b, m и n просто подбором, но в действительности задача представления заданного числа в виде суммы двух квадратов хорошо изучена. Она

связана с так называемыми гауссовыми целыми числами — числами вида $x+y\sqrt{-1}$, где x и y — целые. В частности, можно доказать, что нетривиальное представление $2b^2=m^2+n^2$ существует тогда и только тогда, когда в разложении b на простые множители входит хотя бы одно простое число вида $4k+1$. Подробнее об этом можно прочитать, например, в статье В. Сендерова и А. Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» (Квант, 1999, № 3, стр. 14—22).

2. Выберем любую из получившихся частей. Рассмотрим сумму $a_1+a_2+...+a_n$, где a_i — количество сторон i-й грани.

Каждое ребро многогранника, по которому ломаная не проходит, посчитано в этой сумме дважды и поэтому чётность суммы не зависит от числа таких рёбер. Каждое ребро, через которое проходит ломаная, входит в сумму ровно один раз. Таких рёбер 2003, поэтому вся сумма нечётна.

Если бы количество граней с нечётным числом сторон было чётно, то рассмотренная сумма также была бы чётна. Значит, это количество нечётно.

3. Ответ: степень многочлена может равняться только 1.

Решение. Если степень многочлена $P(x)$ равна 0, то $P(x)=1$ (старший коэффициент равен 1). Но тогда уравнение $P(a_1)=0$ не имеет решения. Если степень многочлена равна 1, то, например, многочлен $P(x)=x-1$ и последовательность 1, 2, 3, ... ($a_n=n$) удовлетворяют условию задачи.

Докажем, что нет таких многочленов степени 2 и выше. Можно показать (см. ниже), что найдётся положительная константа C (для каждого многочлена — своя), что если $|x|>C$, то $|P(x)|>|x|$. Заметим теперь, что все члены последовательности по модулю ограничены C. Действительно, если $|a_n|>C$, то $C<|a_n|<|P(a_n)|=|a_{n-1}|$. Продолжая, получим:

$$C<|a_n|<|P(a_n)|=|a_{n-1}|<|P(a_{n-1})|<...<|P(a_2)|=|a_1|<|P(a_1)|=|0|,$$

что неверно.

Теперь мы получим, что последовательность состоит из целых чисел, по модулю не превосходящих C, а их конечное число, т. е. в последовательности обязательно будут повторения.

Осталось обосновать существование такой константы C. Для многочлена $P(x)=x^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_2x^2+b_1x+b_0$ можно взять $C=|b_{n-1}|+...+|b_1|+|b_0|+1$. Действительно, если $|x|>C$, то

$$\begin{aligned}|P(x)| &\geqslant |x|^n-(|b_{n-1}|\cdot|x|^{n-1}+...+|b_1|\cdot|x|^1+|b_0|)\geqslant\\ &\geqslant |x|^n-(|b_{n-1}|\cdot|x|^{n-1}+...+|b_1|\cdot|x|^{n-1}+|b_0|\cdot|x|^{n-1})=\\ &=|x|^{n-1}\cdot(|x|-(|b_{n-1}|+...+|b_0|))>|x|^{n-1}\geqslant|x|.\end{aligned}$$

4. Первое решение. Обозначим

$$\overrightarrow{BC}=\vec{a},\quad \overrightarrow{CA}=\vec{b},\quad \overrightarrow{AB}=\vec{c},$$
$$\overrightarrow{MA'}=\vec{x},\quad \overrightarrow{MB'}=\vec{y},\quad \overrightarrow{MC'}=\vec{z}.$$

Тогда условие задачи записывается так:

$$(\vec{c}, \vec{z}) = (\vec{a}, \vec{x}) = (\vec{b}, \vec{y}) = 0, \quad (1)$$

$$((\vec{y}-\vec{z}), (\vec{b}-\vec{c})) = ((\vec{x}-\vec{z}), (\vec{a}-\vec{c})) = 0. \quad (2)$$

Раскрывая в (2) скобки и учитывая (1), получим $(\vec{b}, \vec{z}) + (\vec{c}, \vec{y}) = (\vec{a}, \vec{z}) + (\vec{c}, \vec{x}) = 0$. Поскольку $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$, имеем: $(\vec{b}, \vec{z}) - (\vec{a}, \vec{y}) = (\vec{a}, \vec{z}) - (\vec{b}, \vec{x}) = 0$. Нужно доказать, что $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=0$, для чего достаточно, чтобы $(\vec{a}, (\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})) = (\vec{b}, (\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})) = 0$. Действительно, $(\vec{a}, (\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})) = (\vec{a}, \vec{y}) + (\vec{a}, \vec{z}) = (\vec{a}, \vec{y}) + ((-\vec{c}-\vec{b}), \vec{z}) = -(\vec{b}, \vec{z}) + (\vec{a}, \vec{y}) = 0$. Аналогично, $(\vec{b}, (\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})) = (\vec{b}, \vec{x}) + (\vec{b}, \vec{z}) = (\vec{b}, \vec{x}) + (-\vec{c}-\vec{a}), \vec{z}) = -(\vec{a}, \vec{z}) + (\vec{b}, \vec{x}) = 0$.

Второе решение. Для равностороннего треугольника утверждение задачи тривиально. Сведём задачу к случаю равностороннего треугольника.

Точки A', B' и C' задаются следующими условиями:

$$MA' \perp BC, \quad MB' \perp AC, \quad MC' \perp AB, \quad A'B' \perp MC, \quad A'C' \perp MB.$$

Повернём треугольник $A'B'C'$ вокруг точки M на 90° против часовой стрелки. Условия на точки A', B' и C' перейдут в следующие:

$$MA' \parallel BC, \quad MB' \parallel AC, \quad MC' \parallel AB, \quad A'B' \parallel MC, \quad A'C' \parallel MB.$$

При этом задача перейдёт в равносильную. Проведём аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в равносторонний. Задача снова перейдёт в равносильную, поскольку выражается только через параллельность, пересечение прямых и середины.

Теперь повернем треугольник $A'B'C'$ по часовой стрелке на 90°. Задача перейдёт в исходную, но с равносторонним треугольником ABC.

5. Пусть внутри страны, пока ещё не поделённой на губернии, возникла автономная область, состоящая из одного города. Эту область, во-первых, можно разделить на три губернии (две пустые), и во-вторых, она удовлетворяет условию как самостоятельная страна, т. е. при удалении всех остальных городов.

Будем добавлять города к автономной области с сохранением этих двух условий.

Предположим, что область содержит не все города. Тогда найдётся дорога, ведущая из города области (обозначим его через X) в город, ещё не принадлежащий автономной области (назовём его Y). Рассмотрим несамопересекающийся путь (последовательность дорог), ведущий из Y в X (рис. 25).

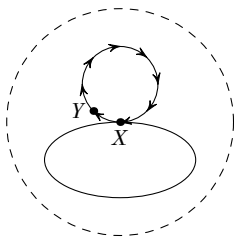

Рис. 25

Докажем, что на этом пути не встретятся города области, кроме разве что последнего города X. Предположим обратное: на этом пути есть город Z, лежащий в автономной области. Тогда из X можно добраться до Z двумя несамопересекающимися путями: один путь идёт через Y, а второй идёт только по городам области (такой путь существует, потому что для области выполнено условие задачи, как и для всей страны). Но по условию такое невозможно. Следовательно, путь из Y в X не содержит других городов из области, кроме X.

Теперь присоединим все города на этом пути (включая Y) к автономной области и отнесём их поочерёдно в те две губернии, в которые X не входит. Все дороги, соединяющие два присоединённых города — это дороги на пути $Y \to X$, иначе между ними было бы два пути. Аналогично, все дороги, соединяющие присоединённый город с городом, уже имевшимся в области — это дорога из X в Y и последняя дорога на пути $Y \to X$. Следовательно, область будет правильно разделена на губернии.

Докажем, что для новой области условие задачи также выполнено. Два несамопересекающихся пути от одного города к другому невозможны, иначе бы вся страна не удовлетворяла условию. От каждого города области можно доехать (по области) до X, а от X — до всех остальных, поэтому по крайней мере один путь от одного города области до другого всегда существует. Значит, новая область тоже удовлетворяет условию.

На каждом описанном шаге область увеличивается хотя бы на один город (Y). Следовательно, рано или поздно все города будут присоединены. В этот момент область совпадёт со всей страной и при этом будет разделена на губернии. Таким образом, утверждение задачи доказано.

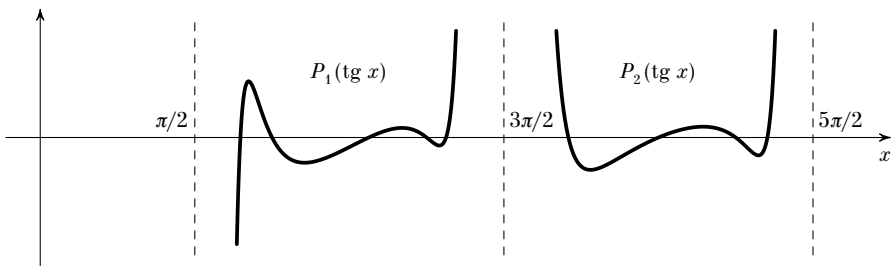

Рис. 26

6. О т в е т: это возможно.

Р е ш е н и е. Пусть, например, $f(x)=\mathrm{arctg}\ x+\pi$, $g(x)=x+\pi$, $h(x)$ — функция, которая на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ равна $P_n(\mathrm{tg}\ x)$ (рис. 26). Тогда

$$P_n(x)=h(\underbrace{g(g(\ldots(g}_{n-1\text{ раз}}(f(x)))\ldots))).$$

П о я с н е н и е. Сопоставим каждой паре x, n, где n — натуральное число, а x — действительное, некоторое число $[x, n]$ таким образом, чтобы числа $[x, n]$ не совпадали для любых двух различных пар.

Для этого разобьём действительную ось на интервалы $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$. Каждому номеру n сопоставим интервал $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, каждой паре x, n — соответственно число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, равное $\mathrm{arctg}\ x+\pi n$. Обозначим это число через $n \circledast x$.

Функции f, g, h таковы, что

$$f(x)=1\circledast x,\quad g(n\circledast x)=(n+1)\circledast x,\quad h(n\circledast x)=P_n(x)$$

(см. рис. 26). Тогда $h(\underbrace{g(g(\ldots(g}_{n-1\text{ раз}}(f(x)))\ldots)))$, очевидно, равно $P_n(x)$.

11 КЛАСС

1. Освободившись от знаменателя, приведём наше равенство к виду $x^3z-x^3y+z^3y-z^3x+y^3x-y^3z=0$. Разложив левую часть на множители, получим $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)=0$. Заметим, что при положительных x, y, z последняя скобка положительна. Таким образом, если все числа различны, то все множители не равны нулю. Противоречие.

2. Многочлен $P(x)-x$ имеет степень 2003 и старший коэффициент 1. Поэтому при $x\to+\infty$ его значение стремится к $+\infty$. Следовательно, если число a_n достаточно велико, то $a_{n-1}-a_n=P(a_n)-a_n>0$, т. е. число a_{n-1} будет ещё больше. Тогда аналогично $a_{n-2}>a_{n-1}$ и т. д., и мы не получим 0 ни на каком шаге. Значит, числа в последовательности ограничены сверху. При $x\to-\infty$ значение многочлена $P(x)-x$ стремится к $-\infty$. Поэтому числа в последовательности (аналогично предыдущему) ограничены и снизу, т. е. они сосредоточены на конечном отрезке. Но эти числа целые, поэтому среди них лишь конечное множество различных.

Примечание. Сравните с решением 3-й задачи 10-го класса.

3. Пусть U, V — точки, симметричные H относительно AB и AD соответственно, X — точка пересечения прямых UC и AB, Y — точка пересечения прямых VC и AD. Так как прямая PH проходит через X, а QH — через Y, утверждение задачи равносильно тому, что точки X, H, Y лежат на одной прямой.

Прежде всего отметим, что точки U и V лежат на описанной окружности четырёхугольника. Для доказательства достаточно заметить, что, например, $\angle(UA, UB)=\pi-\angle(HA, HB)=\angle(DA, DB)$ (углы ориентированные). Как следствие,

$$\begin{aligned}\angle(HX, HY)&=\angle(HX, HU)+\angle(HU, HV)+\angle(HV, HY)=\\&=\angle(UD, UC)+\angle(HD, HB)+\angle(VC, VB)=\\&=\angle(AD, AC)+\pi-\angle(AD, AB)+\angle(AC, AB)=\pi.\end{aligned}$$

4. Примем некоторую точку окружности за начало отсчёта. Пусть a_i — длина дуги от начала отсчёта до i-й вишенки по часовой стрелке. Рассмотрим числа $b_i=a_i-i$. Из условия следует, что $|b_m-b_k|<1$ для любых m, k (достаточно рассмотреть две дуги, на которые m-я и k-я вишенки разбивают периметр торта). Пусть b_s — наименьшее из них, тогда $0\leqslant b_i-b_s<1$ для любого i. Отсюда следует, что найдётся такое x, что $x<b_i<x+1$ для всех i. Очевидно, что разрез по радиусам, проведённым в точки с координатами x, $x+1$, ..., $x+n-1$, — искомый.

5. Первое решение. Сначала докажем, что в каждой вершине многогранника сходятся три грани. Рассмотрим произвольный трёхгранный угол. Двойственным к нему называется трёхгранный угол, рёбра которого перпендикулярны граням данного. Очевидно, что сумма любого

двугранного угла данного трёхгранного угла с соответствующим плоским углом двойственного равна π. Так как сумма плоских углов двойственного угла меньше 2π, сумма двугранных углов данного больше π. Поскольку n-гранный угол можно разрезать на $n-2$ трёхгранных, то сумма его двугранных углов больше, чем $\pi(n-2)$, т. е. хотя бы один из них больше $\pi\left(1-\frac{2}{n}\right)$. Так как при $n>3$ выполнено неравенство $1-\frac{2}{n}\geqslant\frac{1}{2}$, в вершине данного многогранника не может сходиться больше трёх рёбер.

Докажем теперь, что если двугранные углы трёхгранного угла острые, то плоские тоже острые. Перейдя к двойственному углу, получим равносильное утверждение: если все плоские углы тупые, то двугранные тоже тупые. Предположим, что для трёхгранного угла $OABC$ это не так, и угол при ребре OC не тупой. Поскольку углы AOC и BOC тупые, то основания перпендикуляров, опущенных из A и B на прямую OC, лежат вне луча OC. Возьмём точки A и B так, чтобы эти перпендикуляры имели общее основание D. Тогда $\angle ADB\leqslant\pi/2$, $AD<AO$, $BD<BO$. Следовательно, $AB^2\leqslant AD^2+BD^2<AO^2+BO^2$, и угол AOB острый — противоречие.

Итак, в данном многограннике плоские углы всех граней острые, значит, все грани — треугольники. Кроме того, в каждой вершине сходятся три грани. Рассмотрим произвольную грань KLM. К каждой её стороне примыкает треугольная грань, и любые две из этих граней имеют общее ребро. Следовательно, третьи вершины этих граней совпадают, и многогранник является тетраэдром.

Второе решение. Для каждой из граней рассмотрим вектор внешней нормали, т. е. вектор, перпендикулярный этой грани и направленный вне многогранника.

1) Докажем, что угол между любыми двумя внешними нормалями тупой или развёрнутый. Пусть это не так — нашлись две грани Γ_1 и Γ_2, внешние нормали к которым образуют угол не больше $\pi/2$. Тогда грани Γ_1 и Γ_2 принадлежат полуплоскостям Π_1 и Π_2, которые образуют двугранный угол величиной не меньше $\pi/2$.

Возьмём точку P на грани Γ_2. Пусть P' — проекция точки P на плоскость грани Γ_1. Точка P' лежит вне многоугольника Γ_1, следовательно найдётся прямая, содержащая некоторое ребро r грани Γ_1 и отделяющая P' от Γ_1. Многогранник лежит внутри острого двугранного угла, соответствующего ребру r, но P лежит вне этого двугранного угла. Противоречие.

2) Остаётся показать, что в пространстве не существует более четырёх векторов, попарные углы между которыми тупые или развёрнутые.

Пусть это не так, и $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ — пять векторов, попарные углы между которыми тупые или развёрнутые. Введём прямоугольную систему координат так, чтобы ось Oz была сонаправлена с $\vec{u}_0$. Обозначим через $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ проекции векторов $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ на плоскость Oxy. Один из углов между $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, скажем, угол между $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, не превосходит $\pi/2$. Это означает, что скалярное произведение $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ неотрицательно. Пусть $\vec{u}_1=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{u}_2=(x_2, y_2, z_2)$. Поскольку угол между $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_0$ тупой, $z_1<0$; аналогично $z_2<0$, следовательно, $z_1z_2>0$. Имеем: $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)=$ $=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=(\vec{v}_1, \vec{v}_2)+z_1z_2>0$. Получаем, что угол между $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ острый — противоречие.

6. Ответ: 290.

Решение. Покажем, что при $k>290$ такая ситуация невозможна. Упорядочим в каждой деревне борцов по убыванию силы и выберем в каждой деревне десятого по силе борца. Покажем, что деревня, в которой живёт слабейший из выбранных борцов, не может быть сильнее следующей за ней. Обозначим выбранных борцов в нашей и следующей деревнях через A и B соответственно. Тогда в нашей деревне 11 борцов не сильнее, чем A, а в следующей — 10 борцов хотя бы такой же силы, как B. Все поединки между этими борцами закончатся в пользу второй деревни, и этих поединков ровно 110, т. е. поединков, в которых выиграл борец нашей деревни, не больше $20\cdot 20-110=290$.

Приведём пример, показывающий, что при $k\leqslant 290$ описанная ситуация возможна. Пусть среди борцов есть 210 новичков и 190 мастеров (любой новичок слабее любого мастера). Пронумеруем деревни против часовой стрелки. Поместим в первую деревню одного слабейшего новичка и 19 слабейших мастеров; во вторую — двух новичков, слабейших из оставшихся, и 18 мастеров, слабейших из оставшихся; в третью — трёх слабейших из оставшихся новичков и 17 мастеров, слабейших из оставшихся; ...; в последнюю деревню мы поместим 20 сильнейших новичков. Это размещение по деревням указано в табл. 3 (в столбце «Борцы» числа, набранные прямым шрифтом означают силы мастеров, набранные курсивом — силы новичков):

Таблица 3

Деревни	Борцы
1	*1* 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229
2	*2* *3* 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247
3	*4* *5* *6* 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264
4	*7* *8* *9* *10* 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280
5	*11* *12* *13* *14* *15* 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295
6	*16* *17* *18* *19* *20* *21* 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309
7	*22* *23* *24* *25* *26* *27* *28* 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322
8	*29* *30* *31* *32* *33* *34* *35* *36* 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334
9	*37* *38* *39* *40* *41* *42* *43* *44* *45* 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345
10	*46* *47* *48* *49* *50* *51* *52* *53* *54* *55* 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355
11	*56* *57* *58* *59* *60* *61* *62* *63* *64* *65* *66* 356 357 358 359 360 361 362 363 364
12	*67* *68* *69* *70* *71* *72* *73* *74* *75* *76* *77* *78* 365 366 367 368 369 370 371 372
13	*79* *80* *81* *82* *83* *84* *85* *86* *87* *88* *89* *90* *91* 373 374 375 376 377 378 379
14	*92* *93* *94* *95* *96* *97* *98* *99* *100* *101* *102* *103* *104* *105* 380 381 382 383 384 385
15	*106* *107* *108* *109* *110* *111* *112* *113* *114* *115* *116* *117* *118* *119* *120* 386 387 388 389 390
16	*121* *122* *123* *124* *125* *126* *127* *128* *129* *130* *131* *132* *133* *134* *135* *136* 391 392 393 394
17	*137* *138* *139* *140* *141* *142* *143* *144* *145* *146* *147* *148* *149* *150* *151* *152* *153* 395 396 397
18	*154* *155* *156* *157* *158* *159* *160* *161* *162* *163* *164* *165* *166* *167* *168* *169* *170* *171* 398 399
19	*172* *173* *174* *175* *176* *177* *178* *179* *180* *181* *182* *183* *184* *185* *186* *187* *188* *189* *190* 400
20	*191* *192* *193* *194* *195* *196* *197* *198* *199* *200* *201* *202* *203* *204* *205* *206* *207* *208* *209* *210*

Покажем, что i-я деревня сильнее $(i-1)$-й при $i>1$. Действительно, в k-й деревне есть k новичков и $20-k$ мастеров. При этом мастера i-й деревни победят всех в $(i-1)$-й, а новички победят новичков, и всего побед будет $i(i-1)+20(20-i)=i^2-21i+400$. Вершина этой параболы находится в точке $i=10{,}5$, а ветви направлены вверх, поэтому минимальное значение

в целой точке достигается при $i=10$, 11 и равно 290, т. е. i-я деревня сильнее $(i-1)$-й при $k\leqslant 290$. Кроме того, мастера первой деревни победят новичков 20-й, и всего побед будет $20\cdot 19=380>290$, т. е. все условия выполнены.

7. О т в е т: 2 и 3 (например, выполнены равенства $2^2-1=2+1$, $(3-1)^2=3+1$).

Р е ш е н и е. Предположим, что при некотором $a>3$ требуемое выполнено:

$$A=(a^{m_1}-1)\ldots(a^{m_n}-1)=(a^{k_1}+1)\ldots(a^{k_l}+1).$$

Докажем сначала, что как любое m_i, так и число $a-1$ являются степенями двойки. Пусть γ — нечётный делитель числа m_i, а p — любой простой делитель числа $a^\gamma-1$. Тогда в правом произведении найдётся множитель $a^{k_j}+1$, делящийся на p. Поэтому число

$$((a^{k_j})^\gamma+1)-((a^\gamma)^{k_j}-1)=2$$

делится на p, т. е. все простые делители числа $a^\gamma-1$ — двойки и $(a^{\gamma-1}+\ldots+a+1)(a-1)=a^\gamma-1=2^n$. Поскольку $a>3$, то $n>1$ и γ нечётно, поэтому выражение в первой скобке — нечётный делитель числа 2^n. Значит, $\gamma=1$ и $a-1=2^n$. В частности, $a-1$ делится на 4 (ибо $a-1>2$), поэтому a^k+1 имеет остаток 2 при делении на 4.

Каждое число в левой части исходного равенства представляется в виде

$$a^{2^d}-1=(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\ldots(a^{2^{d-1}}+1)=2^n\cdot 2^d\cdot a_0\ldots a_{d-1},$$

где $a_i=\dfrac{a^{2^i}+1}{2}$ — нечётные числа. Заметим, что при $m>n$ число $a^{2^m}-1$ делится на $a^{2^n}+1$, поэтому НОД$(a_m, a_n)\leqslant(a^{2^m}+1)-(a^{2^m}-1)=2$; поскольку a_i нечётны, они попарно взаимно просты. Пусть q — максимальная степень двойки, входящая в m_i или k_j. Тогда A представляется в виде $A=2^N a_0^{N_0}\ldots a_q^{N_q}$, причём $N>N_0+\ldots+N_q$, так как это справедливо для любого представления $a^{2^d}-1$.

Поскольку любое число вида $a^{k_j}+1$ делится лишь на первую степень двойки, то их в представлении числа A не меньше N. Но каждое из них делится на одно из чисел a_i: если $k_j=2^r s$, где s нечётно, то $a^{k_j}+1$ делится на a_r. Тогда, поскольку $N>N_0+\ldots+N_q$, то на какое-то число a_i делится больше, чем N_i чисел $a^{k_j}+1$, а следовательно, A делится на бóльшую степень a_i, чем N_i. Противоречие с тем, что a_i нечётны и попарно взаимно просты.

Информация о наборе в специализированные школы и классы на 2003/2004 учебный год

Школа, адрес, телефон	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 2 ул. Фотиевой, 18 137 17 69, 137 69 31	7 физ.-мат., 8 инф.-мат.; добор в 9 и 10 физ.-мат.	Апрель—май
№ 25 Университетский пр-т, 7 938 00 25	10 мат.	С марта по четвергам в 16^{00}
№ 54 ул. Доватора, 5/9 245 99 72, 245 54 25	9 мат.	С марта по четвергам в 10^{00}
№ 57 Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 291 85 72, 291 54 58	8 мат., 9 мат., 9 гум.	Апрель
№ 91 Поварская ул., 14 290 35 58	9 мат.	Апрель
№ 109 ул. Бакулева, 20 434 51 06, 434 51 07	9 физ.-мат.	Март
№ 179 ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 292 01 05	9 физ.-мат.	Март—апрель
№ 192 Ленинский пр-т, 34а 137 72 85	7 биол.-хим.; добор в 8—10 биол.-хим.	Апрель—май
№ 218 Дмитровское ш., 5а 976 03 20, 976 40 87	8 инд. уч. пл. (угл. изучение мат., физ., биол. — по выбору учащихся); добор в 9 мат., 9 гум., 10 инд. уч. пл.	Апрель
№ 257 Ленинский пр-т, 132 432 87 68, 432 46 20	9 мат.	Апрель—май по вторникам в 16^{00}
№ 444 Ниж. Первомайская ул., 14 465 23 52	5 мат., 8 мат., 10 физ.-мат.	Март—май
№ 463 Судостроительная ул., 10, к. 1 312 33 51, 112 34 19	8 физ.-мат.	Март—начало апреля
№ 1101 ул. Академика Варги, 34 339 77 39	7—10 мат.	Апрель
№ 1134 ул. Раменки, 15, к. 1 932 00 00, 932 08 01	9 физ.-мат.	С марта по вторникам в 14^{00}
№ 1173 Чертановская ул., 29б 313 06 46	8 физ.-мат.	Март—начало апреля
№ 1189 ул. Маршала Василевского, 9, к. 1 193 60 23, 193 20 11	10 физ.-мат.	Апрель
№ 1514 ул. Крупской, 12 131 80 38, 131 80 33	9 гум., 9 культурол.; добор в 10 гум., 10 культурол.	Апрель—май
№ 1543 ул. 26-ти Бакинских Комиссаров, 3, к. 5 433 16 44, 434 26 44	8 мат., 8 гум., 8 биол., 8 физ.-хим.	Апрель
№ 1580 Балаклавский пр-т, 6а 316 59 66, 316 50 22	8, 10, 11 физ.-мат.	Запись на экзамены с 28/II по 17/III
СУНЦ МГУ (специализированный учебно-научный центр МГУ) Кременчугская ул., 11 445 11 08	10 физ.-мат., 10 хим., 10 биофиз., 10 комп.-инф., 11 физ.-мат.	Апрель—май

Более полная и свежая информация о наборе в специализированные школы и классы на сайте МЦНМО http://www.mccme.ru/schools

Информация о наборе в некоторые школы и классы, сотрудничающие с факультетами МГУ и ОЛ ВЗМШ РАО при МГУ на сайте http://www.sigma-edu.ru/new_year/new_year.html (сайт Образовательного центра «Сигма»).

Осенью 1999 года Московское математическое общество, Малый мехмат МГУ и Московский центр непрерывного математического образования возобновили

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

для школьников 9—11 классов, которые читаются известными учёными и педагогами Москвы. Лекции проходят по субботам с 16^{10} до 18^{00} в аудитории 16–10 главного здания МГУ на Воробьёвых горах. Лекции посвящены и современной математике, и математике прошлого, но всякий раз — выразительным и содержательным сюжетам. Иногда речь может заходить о весьма трудных идеях и результатах, но знаний, выходящих за рамки школьной программы, от слушателей не требуется.

Телефон для справок: 939 39 43. Информация о лекциях в сети Интернет представлена на сайте МЦНМО http://www.mccme.ru/

Одновременно издательство Московского центра непрерывного математического образования организовало издание брошюр серии

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»,

в которые вошли обработанные и дополненные записи некоторых лекций, читавшихся на Малом мехмате и на других мероприятиях для школьников.

Брошюры серии «Библиотека ,,Математическое просвещение‘‘», а также другие книги издательства МЦНМО вы можете приобрести в магазине

«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА».

В магазине представлен наиболее полный ассортимент книг издательства МЦНМО. Эти книги продаются по издательским ценам. Здесь также можно найти книги по математике ведущих издательств, таких как «Мир», Физматлит, УРСС, «Факториал», «Регулярная и хаотическая динамика».

В отделе школьной литературы представлен широкий ассортимент книг для школьников, учителей, руководителей математических кружков. В отделе вузовской и научной литературы можно найти учебники и научные монографии ведущих российских и зарубежных математиков. В магазине также имеются отделы «книга—почтой» и букинистический.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до ст. м. «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком.

Телефон для справок: 241 72 85.

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья (летом — кроме субботы и воскресенья) с 11^{30} до 20^{00}.

E-mail: biblio@mccme.ru http://biblio.mccme.ru/