9 КЛАСС

1. Ответ: нет, не могло.

Заметим, что при повышении курса акций он умножается на $\frac{117}{100}$, а при понижении — на $\frac{83}{100}$. Следовательно, после k повышений и l понижений курс акций умножится на

$$\left(\frac{117}{100}\right)^k \left(\frac{83}{100}\right)^l.$$

Если это число равно единице, то $117^k \cdot 83^l = 100^{k+l}$. Но в правой части этого равенства стоит чётное число, а в левой — нечётное. Противоречие.

Ср. с решением задачи 3 для 8 класса.

2. Ответ: да, могло.

Решение аналогично решению задачи 1 для 8 класса.

3. Доказательство от противного. Пусть шар вернулся в исходную точку. Обозначим начальную и конечную точку через A, а точки отражения через $A_1, \ldots, A_n$. Заметим, что угол (обычный, ненаправленный) между вертикальной прямой и отрезками пути шара постоянен (нетрудно проверить, что он не меняется при отражениях относительно как вертикальных, так и горизонтальных прямых). Можно считать, что он не равен 0° и 90°, иначе шар свалится в первую попавшуюся лузу. Так как A — вершина внутреннего угла, то существует лишь один луч с вершиной в A, образующий данный угол с вертикальной прямой и лежащий в той четверти, где расположен стол. Значит, шар вернулся в A по той же прямой, по которой и вылетел.

Таким образом, первый и последний отрезки пути шара совпадают. Рассмотрим два отражения шара от стенки в точке A_1 — первое и последнее. Учитывая закон отражения, получим, что шар в конце пути прилетел в точку A_1 по той же траектории, по которой вылетел из неё в начале. Поэтому второй и предпоследний отрезки пути шара также совпадают. Рассуждая аналогично, мы видим, что путь шара состоит из двух частей, вторая из которых получается из первой прохождением в обратном направлении. Значит, в некоторый момент времени шар, отразившись от стенки, пошёл в противоположную сторону. Но тогда некоторый отрезок пути шара перпендикулярен стороне многоугольника, следовательно образует с вертикальной прямой угол 0° или 90°. Противоречие.

4. Пусть $a \leqslant b \leqslant c$ — стороны треугольника ABC. Пусть I — точка пересечения биссектрис углов A и B (рис. 1). Тогда

$$\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} > \frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} \geqslant \frac{l_a + l_b}{c} > \frac{AI + IB}{c} > 1.$$

Здесь второе неравенство выполнено, поскольку любой отрезок внутри треугольника (в частности, любая медиана) не превосходит наибольшей стороны. Третье неравенство выполнено, поскольку $l_a > AI$ и $l_b > BI$.

Четвёртое неравенство выполнено по неравенству треугольника для треугольника AIB.

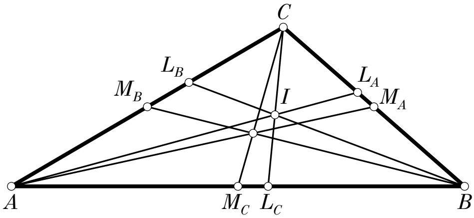

Рис. 1

Комментарий автора задачи. Данная задача — один из примеров преимущества метода «инженерной прикидки» перед методом «грубой силы». Попытки решить задачу с помощью формул, выражающих длины биссектрис и медиан через стороны треугольника, заводят в тупик (не удалось это сделать и автору задачи, даже с помощью компьютера). В то же время метод «сели и подумали» даёт короткое решение, из которого ясно, что биссектрисы и медианы ни при чём — неравенство верно для произвольных отрезков, соединяющих вершину треугольника и какую-то точку на противоположной стороне. (Подумайте, можно ли в условии задачи заменить биссектрисы на высоты.)

Отметим, что оценка точная, т. е. число 1 в правой части нельзя заменить на большее так, чтобы неравенство осталось верным для всех треугольников (докажите это!), т. е. данная задача является примером симметричного неравенства, в котором оценка точная, но не достигается ни в каком треугольнике. На первый взгляд, это кажется невозможным — рассмотрим треугольник, у которого $\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}+\frac{l_c}{m_c}<1{,}1$, потом такой, у которого эта сумма меньше, чем 1,01, потом 1,001 и т. д. Посмотрим, к какому треугольнику они будут «стремиться» — для этого треугольника искомая сумма должна быть равна 1 (а чему ещё она, казалось бы, может быть равна?). Подумайте, почему это нестрогое рассуждение (часто приводящее в верному результату) в данному случае неверно.

Бытует мнение, что любое верное симметричное неравенство можно доказать многократным применением неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом и аналогичных. Наша задача является контрпримером к этому утверждению, поскольку в классических неравенствах о средних равенство достигается, когда все слагаемые равны между собой. В данной же задаче, если $\frac{l_a}{m_a}=\frac{l_b}{m_b}=\frac{l_c}{m_c}$, то $\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}+\frac{l_c}{m_c}=3$ (докажите это!), что далеко от точной оценки 1.

Заинтересовавшимся темой геометрических неравенств рекомендуем следующую литературу:

[1] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970. — (Библиотека математического кружка; вып. 12). — [http://www.mccme.ru/free-book/djvu/bib-mat-kr/shk-12.djvu].

[2] В. Г. Болтянский, И. М. Яглом. Геометрические задачи на максимум и минимум // Энциклопедия элементарной математики / Под редакцией П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина. — Кн. 5: Геометрия. — С. 270—348. — М.: Наука, 1966. — [http://www.mccme.ru/free-book/djvu/encikl/enc-el-5.htm].

[3] Н. М. Седракян, А. М. Авоян. Неравенства. Методы доказательства: Пер. с арм. — М.: Физматлит, 2002.

[4] В. М. Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: Наука, 1986. — (Библиотечка «Кванта»; вып. 56).

[5] O. Bottema, R. Z. Djordjevic, R. Janic, D. S. Mitrinovic, P. M. Vasic. Geometric Inequalities. — Groningen: Wolters-Noordhoff, 1969.

(*С. В. Маркелов*, markelov@mccme.ru)

5. Ответ: при правильной игре выигрывает второй игрок.

Пусть p — произведение первых 21 простых чисел. Заметим, что p — наименьшее не разрешённое число. Поскольку 2004! делится на p, то число m, полученное после первого хода первого игрока, не делится на p. Остаток от деления m на p меньше, чем p. Поэтому он не может делиться больше чем на 20 простых чисел. Второй игрок сможет либо взять все оставшиеся камни, либо вычесть этот остаток и снова получить число, делящееся на p, и т. д.

6. Ответ: а), б) да, мог.

а) Заметим, что угадать 18 карт не составляет труда. Действительно, первыми двумя рубашками помощник может «закодировать» масть второй карты (сопоставив каждой масти один из четырёх возможных вариантов расположения двух рубашек), следующими двумя рубашками — масть четвёртой и т. д.

Когда в колоде остались две карты, экстрасенс знает, какие они (так как он видел, какие 34 карты вышли), и поэтому помощнику достаточно закодировать лишь порядок, в котором они лежат; это легко сделать при помощи рубашки 35-й карты. Таким образом экстрасенс угадает масти 19 карт.

б) Рассмотрим следующие 17 карт: все нечётные карты, кроме первой и предпоследней, и вторую карту. Заметим, что среди этих семнадцати карт обязательно найдутся пять карт одной масти. Назовём эту масть *основной*. Положением первых двух карт колоды помощник может закодировать основную масть. Положением $(2k-1)$-й и $2k$-й карт (для $1<k<18$) помощник может закодировать масть $2k$-й карты. Положением рубашки предпоследней карты помощник может закодировать масти двух последних карт (см. решение пункта а)).

Экстрасенс должен называть основную масть на каждую из выбранных семнадцати карт. Тогда он угадает масти хотя бы пяти из выбранных семнадцати карт. Кроме того, экстрасенс угадает масти всех чётных карт, кроме второй и последней, а также масти двух последних карт. Всего он угадает масти 23 карт.

Комментарий. Покажем, как экстрасенс мог угадать масти 24 карт. Для этого достаточно из первых 34 карт угадать масти хотя бы 22 (см. конец решения пункта а)). Разделим эти 34 карты, кроме первой, на 11 троек, идущих подряд. Положение первой карты (не входящей ни в одну из троек) будет указывать, каких мастей в первой тройке больше — чёрных или красных. Не уменьшая общности, предположим, что чёрных больше.

Рассмотрим карты первой тройки. Назовём *натуральными* картами первые две чёрные карты. Оставшуюся карту назовём *ненатуральной* (она может быть как чёрной, так и красной). Поворотом рубашки каждой из двух натуральных карт помощник покажет, какую из двух мастей чёрного цвета должен называть экстрасенс. Используя эту информацию, экстрасенс угадает масти обеих натуральных карт. Поворотом рубашки ненатуральной карты помощник «кодирует» цвет, который чаще встречается в следующей тройке. (Заметим, что если красная карта в первой тройке не последняя, то её ненатуральность экстрасенс сможет опознать только после её открытия.)

Теперь то же самое можно сделать со второй тройкой — при этом экстрасенс угадает в ней две масти из трёх и узнает преобладающий цвет следующей тройки, и т. д. Таким образом, он угадает масти всех карт, кроме, быть может, первой карты, и ещё 11 карт (по одной в каждой тройке), т. е. всего не менее 24 карт.

Жюри умеет строить (гораздо более сложный) алгоритм, обеспечивающий угадывание мастей 25 карт. А вот можно ли заведомо угадать масти 26 карт, жюри неизвестно.